This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

Math
8608
45.3

HARVARD SCIENCE CENTER LIBRARY

BOUGHT FROM THE INCOME OF THE FUND
BEQUEATHED BY
PETER PAUL FRANCIS DEGRAND
(1787-1855)
OF BOSTON
FOR FRENCH WORKS AND PERIODICALS ON THE EXACT SCIENCES
AND ON CHEMISTRY, ASTRONOMY, AND OTHER SCIENCES
APPLIED TO THE ARTS AND TO NAVIGATION

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ

DES

LIGNES DU SECOND ORDRE.

Digitized by Google

OUVRAGE DU MÊME AUTEUR.

Sous presse :

ESSAI SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Cet ouvrage, de format in-4°, paraîtra par livraisons à partir de Janvier 1845.

PARIS.—IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
RUE RACINE, 28, PRÈS DE L'ODÉON.

Digitized by Google

TRAITÉ

DES

LIGNES DU SECOND ORDRE

PAR

M. ANGER DE LA LORIAIS

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
INGÉNIEUR AU CORPS ROYAL DES PONTS ET CHAUSSÉES.

TOME PREMIER.

TEXTE.

PARIS.

CARILIAN-GŒURY ET Vor DALMONT, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,
Éditeurs des Nouvelles Annales de Mathématiques, etc., etc.
Quai des Augustins, nos 39 et 41.

1845.

Digitized by Google

Math 8608.45.3
I

HARVARD COLLEGE
SEP 5 1922
LIBRARY
DEGRAND FUND

(2 vols)

Digitized by Google

DÉDIÉ

À ma Mère,

en témoignage de respect et d'amitié.

Digitized by Google

Digitized by Google

INTRODUCTION.

On possède aujourd'hui un grand nombre d'ouvrages traitant des courbes du second ordre, mais tous ceux qui ont paru sont élémentaires et généralement destinés aux jeunes gens qui aspirent aux écoles du gouvernement.

L'ouvrage que je livre au public, fait dans mes instants de loisir, ne renferme point de propriétés nouvelles, et cependant j'ai pensé qu'il pourrait être consulté avec fruit par les personnes qui étudient ces sortes de matière.

C'est du reste un devoir pour l'auteur qui écrit un livre nouveau sur un sujet si souvent exploré, de rendre compte au lecteur des motifs qui l'y ont déterminé. « Il y a des gens, dit Pascal, qui voudraient qu'un auteur ne parlât jamais de choses dont les autres ont parlé; autrement on l'accuse de ne rien dire de nouveau; mais si les matières qu'il traite ne sont pas nouvelles, *la disposition en est nouvelle:* comme si les pensées ne formaient pas un autre corps de discours par une disposition différente, aussi bien que les mots forment d'autres pensées par les différentes dispositions. »

Ces réflexions semblent s'appliquer plus qu'à tout

Digitized by Google

autre, au sujet de cet ouvrage. Sans doute il serait impossible de ne dire que des choses nouvelles dans un livre traitant des courbes du second ordre; mais sans toucher au fond, on peut changer la forme et essayer de présenter les propriétés de ces courbes dans un ordre nouveau, qui rende leur étude attrayante et leur enchaînement plus facile à saisir.

Si on examine l'ordre dans lequel les propriétés des courbes du second ordre sont exposées dans les ouvrages élémentaires, on reconnaît, que chaque courbe y est traitée séparément, et la disposition suivie pour l'étude de chacune d'elles y est la même; en un mot, plus on avance, plus on reconnaît qu'on ne fait que répéter, sauf quelques changements de signes, tout ce qui a été développé sur la courbe précédente. Cette disposition est sans contredit la meilleure et la plus facile pour faire retenir aux lecteurs les propriétés des trois courbes qu'ils ont étudiées. Mais elle ne permet pas, dès l'entrée dans cette branche des mathématiques, de résoudre une foule de questions simples qu'un autre ordre met à même d'aborder facilement. L'étude des propriétés des courbes du second ordre se divise dans cet ouvrage en trois parties.

La première renferme les démonstrations des propriétés de ces lignes par l'analyse, je n'ai pas cru devoir y joindre d'autres propriétés que celles exposées dans les ouvrages élémentaires; car le but de ce livre n'est pas d'offrir au lecteur un recueil des propriétés de ces courbes. Dans cette partie je n'ai pas hésité à employer assez souvent le calcul différentiel et intégral; mon but en agissant ainsi a été de faire ressortir autant que

Digitized by Google

possible les propriétés des courbes du second degré, de celles des autres courbes algébriques. Cet inconvénient disparaît presque en totalité à cause du grand nombre de personnes initiées aux premières notions de cette branche des mathématiques; du reste le titre seul de cet ouvrage permet d'employer tout ce qui est utile pour l'étude qu'on s'est proposé de faire. Les théories des tangentes, sous-tangentes, des foyers, des diamètres conjugués et des cordes supplémentaires ont été exposées en partant de l'équation générale $y^2 = mx^2 + 2px$, résumant, comme on le verra, toutes les courbes du second ordre, en donnant aux coefficients des valeurs convenables. Cette disposition me semble préférable pour les lecteurs qui ont peu de temps à consacrer à l'étude de ces courbes; en outre elle initie immédiatement à la discussion d'un problème, avantages que ne présentent point les ouvrages élémentaires habituellement suivis. Les jeunes gens y sont toujours soumis à l'ancienne méthode d'étudier les propriétés des lignes par théorèmes, aussi leur faut-il un temps assez long pour qu'ils puissent imprimer à leur esprit une autre direction. De là naissent les deux et trois années, et même quelquefois quatre années, que mettent les élèves à arriver à un résultat. L'ouvrage que je présente est loin de remédier à l'inconvénient signalé; je me trouverais malgré cela heureux, s'il peut être utile aux lecteurs, et donner l'idée à ceux qui s'occupent particulièrement de cette branche des sciences, de créer un ouvrage permettant de consacrer à l'étude des lignes du second degré moins de temps, tout en donnant aux jeunes gens un ordre d'idées dont ils puissent se servir plus tard dans les diverses carrières qu'ont à choisir ceux qui arrivent aux écoles du gouvernement.

Digitized by Google

J'ai pensé qu'il était convenable de donner en note la discusion de l'équation générale $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, afin de ne pas renvoyer le lecteur aux ouvrages habituellement suivis. Dans la première partie j'ai traité des développées des courbes du second ordre, parce qu'elles sont liées intimement à ces dernières. Quant aux rayons de courbure, leur étude est indispensable pour avoir la forme exacte de ces lignes.

Je n'ai point fait de chapitres distincts pour les constructions graphiques des tangentes, des directrices. Au fur et à mesure que les propriétés qui donnent lieu à ces constructions se sont présentées, on les a exposées successivement pour chaque courbe.

La seconde partie se compose des propriétés des lignes du second ordre exposées par des considérations géométriques. On n'a pu suivre la marche adoptée dans la première partie, en conséquence chaque courbe y est traitée séparément; et, autant qu'il a été possible, je me suis attaché à donner, à la suite de la démonstration géométrique, la démonstration analytique. Mon but a été d'offrir au lecteur un moyen de comparer les deux méthodes et de reconnaître que les démonstrations analytiques sont beaucoup plus simples et s'étendent plus facilement aux divers cas particuliers que les démonstrations géométriques.

Généralement les courbes du second ordre ne sont présentées que comme un sujet d'application de l'algèbre à la géométrie, à l'exception toutefois des recherches de celles de leurs propriétés dont la connaissance est

Digitized by Google

indispensable, à cause de l'application fréquente qu'on est obligé d'en faire. Cet ouvrage aura donc cela de nouveau, de présenter les deux méthodes analytique et géométrique réunies.

La troisième partie traite de la quadrature et de la rectification des courbes du second ordre. Ce dernier sujet a été traité le plus complétement possible. La méthode donnée par Legendre, pour la rectification d'une courbe quelconque, m'a conduit à démontrer des théorèmes remarquables sur les développées des courbes du second ordre. J'ai cru nécessaire, ayant donné dans la première partie de cet ouvrage les équations des tangentes et des normales à une courbe quelconque, de joindre à la suite de la troisième partie un appendice donnant les méthodes graphiques pour construire à une courbe quelconque une tangente ou une normale, et à deux courbes les tangentes communes ou les normales communes.

Le titre de cet ouvrage fera disparaître au lecteur toute surprise, en voyant quelquefois des questions résolues par plusieurs méthodes.

Je ne me dissimule pas que ce livre paraîtra, au premier aspect, d'une lecture pénible; mais si quelques calculs sont longs et difficiles, ils serviront au moins à graver dans l'esprit du lecteur les méthodes suivies, et lui permettront de les appliquer ensuite à une courbe quelconque du second ordre sans difficulté. Puisse cet ouvrage être utile à ceux qui ont la pénible tâche de se présenter à un concours avec le désir d'y réussir, et mon but sera rempli.

Digitized by Google

Les figures ont été mises dans un volume séparé, afin de rendre leur étude plus facile; elles ont été faites avec soin et exactitude; on s'est surtout attaché à les charger le moins possible de lignes, dans le but unique de rendre les démonstrations plus faciles à suivre.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

	Pages
Considérations générales sur les courbes	1 — 3
Osculation. Courbure. Centre et rayon de courbure	3 — 6
Géométrie analytique	6 — 9
De la ligne droite	9 — 11
Énumération des lignes du 2e ordre. Du centre. Du diamètre	11 — 14
Évanouissement des termes du premier degré	14 — 16
Évanouissement du rectangle des variables. Réduction de l'équation	16 — 19
Théorèmes	19 — 20
Tangentes	20 — 27
Construction des tangentes menées d'un point hors la courbe par les formules analytiques	27 — 30
Des tangentes à une courbe algébrique	30 — 32
Des sous-tangentes	32 — 36
Des normales	36 — 49
Des normales aux courbes algébriques. Exemple	49 — 51
De la sous-normale	51 — 52
Des foyers. Théorèmes sur les foyers	52 — 66

Construction de l'Ellipse.

1° Par les foyers. 2° Par l'équation $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$	66 — 67
Lemniscates. Analogie de l'ellipse avec la lemniscate. Construction des tangentes et normales en un point pris sur la courbe, l'ellipse étant considérée comme une lemniscate	67 — 69

Digitized by Google

NOTE I.

Pages
Retour des suites. . . . . 419 — 422

NOTE II.

Discussion complète de l'équation générale du second degré. 422 — 442
Errata. . . . . 443 — 444

FIN DE LA TABLE.

Digitized by Google

TRAITÉ

DES

LIGNES DU SECOND ORDRE.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

1. On appelle centre d'une courbe un point qui divise en deux parties égales toutes les droites qui y passent. Ces droites prennent le nom de diamètres.

On appelle axe d'une courbe, une droite qui divise en deux parties égales toutes les cordes qui lui sont perpendiculaires. Un axe est dit transverse ou non transverse selon qu'il rencontre ou ne rencontre pas la courbe. Les points où un axe transverse coupe la courbe se nomment sommets.

Une courbe peut être considérée comme composée d'éléments rectilignes infiniment petits. La tangente n'est autre chose qu'un de ces éléments prolongés indéfiniment dans les deux sens ; l'élément commun à la droite et à la courbe se nomme point de contact ou élément de contact.

La normale en un point à une courbe est la perpendiculaire élevée à la tangente au point de contact.

Deux courbes sont dites semblables, lorsque, après avoir inscrit dans l'une d'elles un polygone quelconque, il est toujours possible d'inscrire dans l'autre un polygone semblable.

Ier Théorème.

Tout axe d'une courbe divise cette courbe en deux parties égales.

2. En effet, prenons un point quelconque M sur la courbe, si on rabat la partie supérieure ACMB sur la partie inférieure, en la faisant tourner autour de AB comme charnière, le point M tome Fig. 1.

Digitized by Google

bera nécessairement en un point de la courbe AC'M'B; car abaissons sur l'axe AB la perpendiculaire MHM', puisque la ligne AB est un axe, MH=MH', en outre les angles BHM, BHM' étant droits, il s'ensuit que dans le mouvement indiqué la ligne HM se confondra avec HM', en sorte que le point M tombera en un point M' de la courbe AC'B. Ce qu'on vient de dire pour le point M s'appliquerait à tout autre point; donc la courbe ACMB coïncide avec AC'M'B, c'est-à-dire que l'axe AB divise la courbe en deux parties égales.

Corollaire. La perpendiculaire élevée à l'axe au sommet d'une courbe est tangente à cette courbe; car si elle rencontrait la courbe en un second point A', la ligne AA' serait une corde qui devrait avoir A pour milieu, ce qui est absurde, puisque c'est son extrémité.

IIe Théorème.

Toute ligne courbe qui possède deux axes rectangulaires a pour centre le point d'intersection de ces deux axes.

Fig. 2. 3.—Soient AA', BB' ces deux axes, prenons un point M quelconque de la courbe et abaissons des perpendiculaires MP, MQ sur les axes, en les prolongeant au delà de ces lignes d'une quantité égale à elle-même, on obtient les points M', M'' qui appartiennent à la courbe, puisque AA', BB' sont les axes. Joignons les points M', M''; la ligne BB' étant parallèle à MP et en outre MQ étant égal à M''Q, il s'ensuit que BB' coupe M'M'' en son milieu, pour la même raison AA' passe au milieu de M'M'', donc les axes se coupent au milieu de la ligne M'M''. Ainsi M'M'' passe en O et de plus est divisée par ce point en deux parties égales. Donc dans une courbe l'intersection de deux axes rectangulaires est le centre de cette courbe.

Si dans une courbe deux diamètres sont tels, que les cordes que l'un divise en deux parties égales sont parallèles à l'autre et réciproquement, l'intersection de ces deux diamètres, qui sont nommés conjugués, est le centre de la courbe. La démonstration de ce théorème est la même que celle du précédent.

La tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle au diamètre conjugué de celui dont il s'agit. La démonstration est la même que celle qui prouve que toute perpendiculaire à l'extrémité d'un axe est une tangente.

Digitized by Google

Corollaire. Une courbe n'a qu'un centre, car la ligne droite qui les unirait aurait deux milieux, ce qui est absurde.

IIIe Théorème.

4.—Soient ABCDEF une courbe quelconque et un point O pris à l'intérieur de cette courbe, si on divise les distances OA, OB, OC, OD, OE, etc. en parties proportionnelles, les points de division A′, B′, C′, D′, E′, F′, formeront une courbe qui sera semblable à la première, car en joignant les points A, B, C, D, E, F deux à deux et A′, B′, C′, D′, E′, F′... on forme deux polygones qui sont semblables, puisque les angles homologues sont égaux, et les côtés homologues proportionnels par construction. Donc les deux courbes ABCD....., A′B′C′D′..... sont semblables et semblablement disposées. Fig. 3.

Le point O est dit centre de similitude.

Dans deux courbes semblables les tangentes aux points homologues sont parallèles; car on peut concevoir les points de division A, B, C, D, E, F, assez rapprochés pour qu'au point A la ligne AB soit l'élément de la courbe, alors A′B′ sur la seconde courbe sera également un élément de cette dernière, or de ce que les lignes AB, A′B′ divisent les côtés OA, OA′ en parties proportionnelles, il en résulte qu'elles sont parallèles; ainsi, AB, A′B′ sont deux lignes parallèles. Donc, dans deux courbes semblables, les tangentes homologues sont parallèles.

Les polygones ABCD..... et A′B′C′D′..... étant semblables, leurs périmètres sont entre eux comme les côtés homologues, et leurs aires comme les quarrés de ces mêmes côtés. Donc, d'après le théorème démontré plus loin sur les limites, les périmètres de deux courbes semblables sont entre eux comme deux lignes quelconques homologues situées dans ces courbes, et leurs aires sont entre elles comme les quarrés de ces mêmes lignes.

Osculation. Courbure. Centre et rayon de Courbure.

5.—Lorsqu'une droite TG est tangente en un même point, à deux ou plusieurs courbes ACB, DCE, FCH, ces courbes sont tangentes entre elles. Elles se touchent intérieurement ou extérieurement, selon que ces lignes près du point de contact ont leurs convexités tournées dans le même sens ou en sens contraire. Les courbes ACB, FCH se touchent intérieurement, et les courbes ACB, DCE sont tangentes extérieurement. Fig. 4.

Digitized by Google

La ligne NM normale en C à la courbe ACB, point de contact de cette dernière avec les deux autres DCE, FCH, est aussi normale à celles qu'on vient de citer.

Si deux courbes sont simplement tangentes l'une à l'autre, elles n'ont qu'un élément de commun. Mais lorsqu'une courbe a avec une autre courbe autant d'éléments communs qu'il est possible, eu égard à la nature des courbes dont il s'agit, le contact entre ces deux courbes est aussi intime qu'il peut l'être; il y a alors ce qu'on appelle osculation, et la première courbe est dite osculatrice par rapport à la seconde.

Fig. 5. Concevons que AB, BC, CD représentent trois éléments consécutifs d'une courbe.

Par les trois points A, B, C, ou, ce qui est la même chose, suivant les éléments infiniment petits que représentent AB, BC, on peut faire passer une circonférence; mais, généralement, cette circonférence ne pourra passer par un quatrième point D, ou en d'autres termes, suivant un troisième élément CD consécutif aux premiers, attendu que trois points déterminent une circonférence. D'où il suit qu'une circonférence ne peut avoir en commun avec une courbe plus de deux éléments consécutifs, et que par conséquent il y a osculation entre une circonférence et une autre courbe, lorsqu'elles ont deux éléments consécutifs qui leur sont communs.

Une circonférence ne peut être osculatrice relativement à une autre circonférence, puisque deux circonférences doivent se confondre lorsqu'elles ont trois points communs, c'est-à-dire que deux circonférences ne peuvent avoir entre elles qu'un simple contact. Si par les points a et b, milieux des éléments AB, BC, on mène des lignes respectivement perpendiculaires à ces éléments, leur point d'intersection O sera le centre de la circonférence osculatrice en B à la courbe sur laquelle sont les éléments AB, BC, et OB sera le rayon de cette circonférence.

On sait qu'une courbe peut être engendrée par le mouvement d'un point matériel soumis à de certaines forces. Considérons la courbe ABCD sous ce point de vue. Le point générateur change de direction en passant d'un élément AB de cette courbe à l'élément BC, qui le suit immédiatement. La déviation du point décrivant, au point B, est donnée par l'angle GBG'. La courbure au point B est d'autant plus grande que l'angle formé par les deux tangentes consécutives TG, T'G' est plus grand. Cet angle

Digitized by Google

peut donc servir à mesurer la courbure au point B. Mais la somme des angles du quadrilatère OaBb étant égale à quatre droits, et les angles en a et b étant droits, l'angle aOb est le supplément de l'angle ABC, d'où il suit qu'il est égal à GBG'. L'angle GBG' ou son égal aOb est ce qu'on nomme angle de courbure. Le point O prend le nom de centre de courbure, et le rayon OB celui de rayon de courbure.

Si l'on place l'élément BC en BC', l'angle de courbure, et par conséquent la courbure elle-même augmente; le rayon de courbure se place en O', et le rayon O'B devient moindre que OB. On a, en désignant circ (OB) par 2π. OB, et circ (O'B) par 2π. O'B,

$$\frac{\text{ang } a\text{O}b}{4^d} = \frac{\text{arc } a\text{B}b}{2\pi.\ \text{OB}}, \quad \frac{\text{ang } a\text{O}'b'}{4^d} = \frac{\text{arc } a\text{B}b'}{2\pi.\ \text{O}'\text{B}}.$$

D'où l'on tire

$$\text{ang } a\text{O}b = 4^d\,\frac{\text{arc } a\text{B}b}{2\pi.\ \text{OB}}; \quad \text{ang } a\text{O}'b' = 4^d\,\frac{\text{arc } a\text{B}b'}{2\pi.\ \text{O}'\text{B}}.$$

Et si l'on désigne par c et c' les courbures, au point B, des lignes auxquelles appartiennent les arcs égaux aBb et aBb', il vient

$$\frac{c}{c'} = \frac{\text{ang } a\text{O}b}{\text{ang } a\text{O}'b'} = \frac{\text{OB}'}{\text{OB}}.$$

D'où on conclut que les courbures c et c' sont en raison inverse des rayons de courbure OB, O'B.

Les droites aO, bO sont des normales à la courbe où sont situés les éléments AB et BC. Toutes les normales qu'on peut tirer dans une circonférence concourant toutes au centre de cette dernière, il s'ensuit que la courbure d'une circonférence est uniforme, c'est-à-dire qu'elle est la même pour tous les points de cette courbe.

De ce qui précède, on déduit que, la courbure d'une circonférence est d'autant plus grande que son rayon est plus petit. Cette courbure est nulle lorsque son rayon est infini, ce qui donne une ligne droite.

Dans l'ellipse le rayon de courbure croît de l'un des sommets du petit axe jusqu'à l'un des sommets du grand axe. Dans l'hyperbole la courbure décroît à mesure qu'on s'éloigne du sommet, elle devient même sensiblement nulle à une certaine distance, parce que

Digitized by Google

les branches hyperboliques se confondent à très-peu près avec leurs asymptotes. En général, dans une courbe, on appelle sommets les points où la courbure atteint son maximum ou son minimum.

Du même principe il résulte que la courbure est nulle aux points où le rayon de courbure est infini ; les points où cette circonstance se présente sont remarquables en ce que leurs tangentes sont en même temps des sécantes ; on les nomme points d'inflexion.

La courbure est infinie aux points où le rayon de courbure est nul, ce qui arrive, entre autres, aux points de rebroussement de la cycloïde, de l'épicycloïde et à l'origine de la développante circulaire.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

6. La géométrie analytique, ou l'application de l'algèbre à la géométrie, a pour but d'exposer les méthodes à l'aide desquelles on peut appliquer l'algèbre aux recherches géométriques.

Le grand avantage que présente l'ensemble des méthodes constituant cette partie des sciences mathématiques, est de permettre à celui qui peut en tirer parti facilement de toujours résoudre les questions les plus inabordables par la géométrie ordinaire.

Toutes les grandeurs que l'on considère en mathématique, lignes, surfaces et solides, pouvant être rapportées à une grandeur de leur nature respective prise pour terme de comparaison, il en résulte qu'elles peuvent être représentées par des nombres et pour plus de généralité par des lettres ; d'après cela on conçoit que les grandeurs de la géométrie peuvent être soumises aux calculs arithmétiques et algébriques.

L'application de l'algèbre à la géométrie prise dans toute son étendue se divise en deux parties bien distinctes. La première partie comprend la résolution des problèmes de géométrie déterminés, et la seconde la résolution des problèmes indéterminés. Cette division a été suivie dans l'histoire des mathématiques. L'invention de la dernière est due à Descartes. Avant ce grand homme, on n'avait appliqué l'algèbre qu'aux problèmes de géométrie déterminés. Les premières applications de ce genre avaient été seulement numériques ; car elles se bornaient à trouver et à calculer arithmétiquement la valeur numérique des inconnues d'après leur expression

Digitized by Google

algébrique résolue. Vers la fin du quinzième siècle, Viète, célèbre analytique français, imagina de représenter ces expressions par des constructions géométriques, en les supposant obtenues sous une forme explicite par la résolution des équations qui les déterminaient. Les constructions géométriques doivent être considérées seulement comme un moyen élégant de peindre les solutions des problèmes, et non pas comme un procédé suffisamment rigoureux pour trouver les valeurs numériques des inconnues. Relativement à ce dernier objet, le calcul est préférable, parce que son exactitude est indéfinie, et même on doit toujours y avoir recours, toutes les fois que la construction n'est pas très-simple.

Les constructions géométriques ne pouvaient nullement servir pour interpréter les valeurs des inconnues dans les équations indéterminées. Descartes fit faire un pas immense à la science, en montrant que de pareilles équations représentaient des courbes; et l'on peut dire que, par cette découverte, il créa réellement l'application de l'algèbre à la géométrie, dont les constructions de Viète n'étaient qu'une particularité très-bornée. En effet, un problème de géométrie quelconque se réduit toujours à trouver un certain nombre de points, de lignes ou de surfaces, dont la position, ou la forme, satisfasse à certaines conditions données. On peut même considérer la recherche des points comme un problème d'intersection de lignes. Si l'on sait généralement trouver les équations des lignes, d'après l'énoncé des conditions géométriques auxquelles elles doivent satisfaire, et réciproquement découvrir la forme ou le cours des lignes, lorsque l'équation analytique qui les exprime est donnée, il n'y aura pas de problème de géométrie, quelque compliqué qu'il soit, que l'on ne puisse écrire algébriquement, et réduire ainsi à une combinaison d'équations purement analytiques. C'est à l'aide de ce secret que Descartes, à l'âge de vingt ans, parcourant l'Europe dans le simple appareil d'un jeune soldat volontaire, résolvait d'un seul coup d'œil, comme en se jouant, tous les problèmes géométriques que les mathématiciens de divers pays s'envoyaient mutuellement comme des défis publics suivant l'usage de ce temps.

L'application de l'algèbre à la géométrie, lorsqu'elle est ainsi envisagée, n'exige plus, dans chaque problème, la recherche de quelque artifice ingénieux, ou même de quelque condition particulière qui conduise à l'énoncé algébrique; elle n'est plus que l'usage immédiat d'une même méthode, toujours uniforme et directe

Digitized by Google

dans ses procédés. Ces avantages sont dus à ce qu'elle remonte aux éléments simples qui constituent toutes les questions géométriques, et qu'elle en combine les énoncés algébriques, précisément comme la géométrie les assemble pour constituer la question proposée.

Tous les problèmes de géométrie, et même en général toutes les considérations géométriques, portent sur les positions relatives de l'espace. Notre premier pas doit donc avoir pour but de chercher comment ces positions peuvent être exprimées et fixées par un énoncé analytique. L'espace tel que les géomètres le considèrent, est une étendue indéfinie dans laquelle on conçoit que tous les corps sont placés. On ne peut donc y déterminer le lieu absolu des corps, mais seulement leurs positions relatives, qui sont les seules dont la connaissance nous soit nécessaire : et pour cela, on rapporte ces points à des objets fixes, dont on suppose la position connue.

Fig. 6. Sur un plan, concevons deux droites OX, OY faisant entre elles un angle quelconque déterminé : un point quelconque M situé dans ce plan est fixé lorsque les longueurs des droites MQ, MP menées de ce point parallèlement aux lignes OX, OY, et terminées à ces lignes. Car, d'après les propriétés des parallèles, OQ = MP, OP = MQ, d'où il suit que connaissant les lignes MP, MQ de longueur, on peut les fixer de position et avoir par leur intersection le point M.

Fig. 7. Dans l'espace, pour fixer un point, on prend trois plans ZOX, ZOY, XOY faisant entre eux des angles quelconques, mais connus. Un point quelconque M est fixé lorsqu'on connaît les longueurs des lignes MP, MQ, MR menées de ce point parallèlement aux plans et terminées à leur rencontre; car alors on peut mener trois plans parallèles à ZOX, ZOY, XOY qui, chacun contenant le point M, le déterminent par leur intersection.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet. Il vaut mieux consulter à cet égard les excellents traités sur la matière suivis généralement dans les cours de l'Université.

On appelle équation d'une ligne, l'équation qui exprime d'une manière générale la relation constante qui existe entre les abscisses et les ordonnées d'un point quelconque de cette ligne, et cette ligne est dite lieu de l'équation.

On entend par lieu géométrique une ligne composée de points qui ont une propriété commune.

Digitized by Google

Classification des lignes en général.

La forme et la position des courbes étant toujours exprimées par les relations analytiques qui existent entre les coordonnées de leurs différents points, on a été conduit à classer les courbes en différents ordres, d'après la forme de leurs équations.

On les divise d'abord en algébriques et en transcendantes, suivant que leur équation, rapportée à des coordonnées rectilignes, est elle-même algébrique ou transcendante.

On classe ensuite les courbes algébriques suivant le degré de leur équation par rapport aux variables représentant les coordonnées. L'ordre de la courbe est marqué par l'exposant de ce degré. D'après cela l'équation du premier degré entre x et y donne une courbe du premier ordre que nous savons être la ligne droite. L'équation du second degré entre les mêmes variables donne les courbes du second ordre.

Les courbes du second ordre sont aussi souvent appelées sections coniques, parce que les géomètres de l'antiquité les ont étudiées comme provenant de l'intersection d'un cône par un plan.

Dans l'étude des courbes, on ne se contente pas de les classer par ordre, d'après l'exposant de leurs équations, mais encore on cherche les différents genres de lignes renfermés dans un même ordre, puis quand cela se présente on cherche les diverses espèces contenues dans un même genre. Toutes ces courbes sont ensuite classées entre elles d'après certains caractères, qui permettent facilement de les distinguer les unes des autres. Telle est la marche suivie dans l'étude des courbes du second ordre.

On appelle discuter une courbe, en déterminer d'après son équation, la nature, la forme et la position.

Pour que le lecteur ne soit pas obligé dans le cours de cet ouvrage de consulter pour la ligne droite d'autres ouvrages élémentaires de géométrie analytique, nous allons donner les formules résolvant les questions les plus habituellement employées.

De la ligne droite.

§ I.

7. — L'équation d'une droite quelconque est $y = ax + b$.

Digitized by Google

Si les axes sont obliques, $a = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)}$, θ désignant l'angle des coordonnées et α celui de la droite avec l'axe des x.

Si les axes sont rectangulaires, $a = \frac{\sin \alpha}{\sin (90 - \alpha)} = \text{tang } \alpha$.

§ II.

L'équation d'une droite passant par un point (x', y'), est

$$y - y' = a (x - x');$$

a est ici indéterminé.

L'équation d'une droite passant par deux points (x', y'), (x'', y''), est

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x').$$

§ III.

L'équation d'une droite parallèle à la ligne $y = ax + b$, et passant par le point $(x' y')$, est

$$y - y' = a (x - x').$$

§ IV.

Les coordonnées du point d'intersection de deux droites, dont les équations sont $y = ax + b$, $y = a'x + b'$, ont pour expression

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}, \quad y = \frac{a'b - ba'}{a' - a}.$$

§ V.

La distance entre deux points donnés (x', y'), (x'', y''), lorsque les axes sont obliques, est

$$D = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2 (x'' - x') (y'' - y') \cos \theta}.$$

Si les axes sont rectangulaires

$$D' = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

Digitized by Google

§ VI.

L'angle de deux droites, dont $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ sont les équations, a une tangente qui a pour expression, lorsque les axes sont obliques,

$$\text{tang V} = \text{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{\text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\alpha}{1 + \text{tang}\,\alpha \times \text{tang}\,\alpha'}.$$

Si les axes sont rectangulaires, $a = \text{tang}\,\alpha$, $a' = \text{tang}\,\alpha'$, alors

$$\text{tang V} = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

§ VII.

Pour que deux droites $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ soient perpendiculaires, il faut la condition

$$1 + \text{tang}\,\alpha \times \text{tang}\,\alpha' = 0.$$

Si les axes sont rectangulaires, $1 + aa' = 0$ est l'équation de condition.

§ VIII.

La perpendiculaire à la droite $y = ax + b$ menée du point (x', y') a pour équation, les axes étant obliques,

$$y - y' = \frac{-1 - a\cos\theta}{a + \cos\theta}(x - x').$$

Si les axes sont rectangulaires,

$$y - y' = \frac{-1}{a}(x - x').$$

§ IX.

La distance du point (x', y') à la droite $y = ax + b$ a pour expression, si les axes sont obliques,

$$\text{P} = \pm \frac{(y' - ax' - b)\sin\theta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\theta}}.$$

Digitized by Google

Si les axes sont rectangulaires,

$$P' = \pm \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Enumération des lignes du second degré.

8.—L'équation générale des courbes du second degré est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0; \qquad (1)$$

en la résolvant par rapport à y, le coefficient A n'étant pas nul, on a

$$y = \frac{-Bx - D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{x^2(B^2-4AC) + 2x(BD-2AE) + D^2 - 4AF}.$$

Fig. 8. La discussion montre que si $B^2 - 4AC > 0$, la courbe est illimitée dans le sens des x tant positifs que négatifs, puis ensuite qu'elle s'étend à l'infini au-dessus et au-dessous de la ligne $y = \frac{-Bx-D}{2A}$. Cette courbe porte le nom d'hyperbole.

Si $B^2 - 4AC = 0$, l'équation de la courbe résolue par rapport à y est

$$y = \frac{-Bx - D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{2x(BD - 2AE) + D^2 - 4AF};$$

en la discutant on reconnaît qu'elle est limitée dans un sens et illimitée dans l'autre, et qu'elle va en s'écartant indéfiniment de la

Fig 9. ligne $y = \frac{-Bx - D}{2A}$ à mesure qu'on l'éloigne du point où elle se termine sur cette ligne; cette courbe porte le nom de parabole.

Fig. 10. Enfin, si $B^2 - 4AC < 0$, la discussion fait reconnaître que la courbe est limitée dans tous sens; cette courbe se nomme ellipse.

Il peut arriver que $B^2 - 4AC = 0$ et $BD - 2AE = 0$ simultanément, alors l'équation résolue par rapport à y devient

$$y = \frac{-Bx - D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{D^2 - 4AF}.$$

On voit que la courbe se réduit à deux lignes droites parallèles à

Digitized by Google

$y = \frac{-Bx - D}{2A}$, l'une MN située au-dessus et l'autre PQ au-des- Fig. 1.
sous de cette ligne AB, dont $y = \frac{-Bx - D}{2A}$ est l'équation.

Il suit de là qu'à l'inspection d'une équation du second degré, on peut reconnaître si la courbe qu'elle représente est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Du centre.

9.—On appelle centre, dans une courbe quelconque, un point tel que toute droite qui y passe et qui se termine à la courbe est divisée par ce point en deux parties égales.

On va chercher la condition pour qu'une courbe du second degré soit rapportée à son centre. Soient Ay, Ax les axes de coordonnées, pour que A soit le centre, il faut que ce point soit le milieu de la corde quelconque MM', de là il suit que les deux triangles MAD, M'AD' sont égaux, et de leur égalité on déduit AD = AD', MD = Fig. 1.
M'D'; ainsi on voit qu'il faut que les coordonnées des points d'intersection d'une droite quelconque, passant par l'origine des axes, avec la courbe soient égales et de signes contraires.

Soit $y = ax$ l'équation d'une droite quelconque passant par l'origine, éliminons y entre les deux équations

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \quad y = ax;$$

il vient $x^2[Aa^2 + Ba + C] + x[Da + E] + F = 0$; équation qui donne les abscisses des points d'intersection; pour qu'elles soient égales et de signes contraires, il faut qu'on ait $Da + E = 0$; pour que cette condition soit satisfaite quel que soit a, on doit avoir séparément $D = 0$, $E = 0$; alors l'équation générale se réduit à

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F = 0.$$

Donc pour qu'une équation du second degré soit rapportée à son centre, il faut qu'elle ne contienne pas de terme du premier degré en x et y.

Du diamètre.

10.—On appelle diamètre dans une courbe quelconque, le lieu des milieux d'un système de cordes parallèles.

Digitized by Google

Il s'ensuit que tous les diamètres passent par le centre de la courbe.

D'après la définition du diamètre, l'équation générale résolue par rapport à y, montre que la ligne $y = \frac{-Bx - D}{2A}$ est un diamètre, puisqu'elle divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'axe des y. Aussi on déduit de là que parmi les diamètres des courbes du second degré il y en a qui sont des lignes droites; on verra plus tard que tous sont des lignes droites.

Évanouissement des termes du premier degré.

11.—Supposons les axes de coordonnées rectangulaires, hypothèse qui n'altère point la généralité de l'équation. On peut faire disparaître les termes du premier degré en x et y, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes en un point convenablement choisi. Pour déterminer ce point, posons $x = a + x'$, $y = b + y'$, a, b seront ses coordonnées; remplaçant x, y par leurs valeurs dans l'équation générale, il vient

$$\text{(M)}\quad Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + y'[2Ab + Ba + D] + x'[2Ca + Bb + E] + Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F = 0.$$

Les termes de cette équation suivent une loi de formation très-simple, d'abord les termes du second degré ont mêmes coefficients que dans l'équation (1); les coefficients des termes en x et en y sont les dérivées du premier membre de l'équation par rapport à x et à y, dans lesquelles on a remplacé x, y par a, b, enfin le terme indépendant des variables est le premier membre de l'équation $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, dans lequelle on a remplacé x, y par a, b.

Pour faire disparaître les termes en x', y' il faut poser $2Ab + Ba + D = 0$, $2Ca + Bb + E = 0$; équations qui donnent

$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \qquad b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}.$$

L'équation de la courbe se réduit alors à $Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + F' = 0$; c'est-à-dire qu'elle est rapportée à son centre, point dont les coordonnées sont $a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}$, $b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$ par rap-

Digitized by Google

port aux premiers axes ; les expressions simples de a et b permettent d'obtenir immédiatement de l'équation générale $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, la position du centre de la courbe.

Si l'équation est telle que $B^2 - 4AC = 0$ sans que $2AE - BD = 0$, $2CD - BE = 0$, les valeurs de a, b sont infinies, ce qui prouve que la parabole n'a point de centre, et les expressions rationnelles de a, b montrent que les autres courbes ont constamment un centre.

Si $B^2 - 4AC = 0$ en même temps que $2AE - BD = 0$, $a = \frac{0}{0}$, c'est-à-dire que le centre est alors indéterminé ; cette conclusion s'explique aisément, car l'équation générale résolue par rapport à y donne alors

$$y = \frac{-Bx - D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{D^2 - 4AF},$$

Fig. 13.

c'est-à-dire que la courbe se réduit à deux droites parallèles ; or, on sait que la ligne parallèle qui est à égale distance de chacune d'elles, a chacun de ses points jouissant de la propriété d'être centre par rapport aux deux parallèles, car soient MN, AB, PQ ces trois lignes parallèles, soit O un point quelconque sur AB, menant la perpendiculaire commune mop, on a par hypothèse $op = om$; si maintenant on tire la ligne quelconque HoH', les triangles rectangles Hop, $H'om$ sont évidemment égaux, donc $OH = OH'$; donc O est centre par rapport aux lignes MN, PQ ; cette ligne AB a ici pour équation $y = \frac{-Bx - D}{2A}$. On voit que les résultats donnés par l'analyse s'expliquent facilement.

Supposons pour un instant que $B = 0$, $C = 0$, puis posons le coefficient de y' et le terme indépendant des variables égaux à zéro dans l'équation (M), il vient alors

$$b = \frac{-D}{2A}, \quad a = \frac{-Ab^2 - Db - F}{E}.$$

A ne pouvant pas être 0, il s'ensuit que b sera toujours réel et fini ainsi que a, donc l'équation de la parabole peut se réduire à la forme $A'y^2 + E'x = 0$.

On a supposé $B = 0$, on va voir que quelle que soit la courbe on peut toujours faire disparaître le rectangle des variables, alors il

Digitized by Google

sera prouvé que l'équation de la parabole peut toujours se ramener à la forme indiquée ci-dessus.

Évanouissement du rectangle des variables.

12.—On va faire disparaître le rectangle des variables sans changer l'origine des coordonnées, mais en les faisant tourner d'un angle convenable autour de cette origine. Les formules de transformations dans ce cas sont $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$, $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$; α désignant l'angle du nouvel axe des x avec l'ancien, les axes sont supposés rectangulaires.

En substituant ces valeurs dans l'équation $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = 0$, il vient $A'y'^2 + B'x'y + C'x'^2 + F' = 0$. B' étant égal à $2(A - C) \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$, posant $B' = 0$, on a l'équation

$$B[\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha] + 2(A - C) \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

d'où on tire $\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{B}{C - A}$; on voit que $\operatorname{tang} 2\alpha$ sera toujours réel, et comme la valeur d'une tangente peut varier entre $+\infty$ et $-\infty$, il s'ensuit qu'il y a toujours une valeur pour α telle que le rectangle des variables disparaisse.

L'angle α peut varier entre 0° et 400° (division centésimale), donc 2α variera entre 0° et 800°. Désignons par $2\alpha'$ le plus petit angle ayant pour tangente $\frac{B}{C - A}$, il sera toujours compris entre 0° et 200°, alors les valeurs que pourra prendre l'angle 2α seront

$$2\alpha', \quad 2\alpha' + 200, \quad 2\alpha' + 400, \quad 2\alpha' + 600,$$

ce qui donne pour α les valeurs α', $\alpha' + 100$, $\alpha' + 200$, $\alpha' + 300$.

Fig. 13. Soient Ax, Ay les axes primitifs de coordonnées, supposons $MAx = \alpha'$, alors le premier système d'axes, tel qu'en y rapportant la courbe le rectangle des variables disparaisse, est Ax', Ay'; les autres systèmes, d'après les valeurs trouvées ci-dessus, seront le deuxième Ax'', Ay'', le troisième Ax''', Ay''', le quatrième Ax^{IV}, Ay^{IV}; on voit que ces quatre systèmes se réduisent à un seul : donc on peut toujours faire disparaître le rectangle des variables, et il n'y a qu'un seul système d'axes de coordonnées pour lequel cette

Digitized by Google

disparition ait lieu, sauf l'hypothèse $B = 0$, $C = A$; car alors $\tang 2\alpha = \frac{0}{0}$, l'équation de la courbe devient alors

$$y^2 + x^2 + \frac{F}{A} = 0.$$

On voit que c'est l'équation d'une circonférence rapportée à son centre et à des axes rectangulaires; car, soit la circonférence dont OA est le rayon, la définition de cette courbe est que son rayon soit constant; désignons-le par R, on a toujours, quelle que soit la position du point A, le triangle rectangle OAP; alors Fig. 14.

$$\overline{OA}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{OP}^2 \quad \text{ou} \quad R^2 = x^2 + y^2.$$

Telle est l'équation rapportée à son centre et à des axes rectangulaires. Il est démontré par là que l'équation d'une circonférence ne contient point le rectangle des variables toutes les fois que les axes de coordonnées sont rectangulaires.

Ainsi toute courbe à centre du second degré a une équation qu'on peut ramener à la forme $\pm M^2x^2 + N^2y^2 = P$; désignons par a, b les demi-axes de la courbe; en faisant successivement dans la dernière équation $x = 0$, $y = 0$, il vient

$$a = \sqrt{\frac{P}{\pm M^2}}, \quad b = \sqrt{\frac{P}{N^2}}.$$

Dans le cas de l'ellipse on prendra le signe $+$, et dans le cas de l'hyperbole le signe $-$; remplaçant M^2, N^2 par leurs valeurs en fonction de a, b, il vient

$$(X) \qquad \frac{P}{b^2}\, y^2 \pm \frac{P}{a^2}\, x^2 = P.$$

Le terme P doit être positif dans le cas de l'ellipse, sans quoi l'équation $M^2x^2 + N^2y^2 = P$ serait impossible; il s'ensuit que l'équation de cette courbe, rapportée à son centre et à ses axes, est, d'après l'équation (X), $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

Si on considère l'équation de l'hyperbole $N^2y^2 - M^2x^2 = P$, le terme du deuxième membre P peut être positif ou négatif; ainsi l'équation peut prendre les deux formes

$$N^2y^2 - M^2x^2 = P, \quad N^2y^2 - M^2x^2 = -P;$$

Digitized by Google

mais la première forme peut se ramener à la deuxième en changeant y en x et x en y, puis changeant les signes des deux membres, il vient alors $M^2y^2 - N^2x^2 = -P$. Pour arriver là, on a pris l'axe des x pour celui des y, et l'axe des y pour celui des x, la nature de la courbe n'a point changé; ainsi il suffit de considérer l'équation $N^2y^2 - M^2x^2 = -P$, l'autre rentrant dans celle-là.

Alors de l'équation (X) on déduit $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, telle est l'équation de l'hyperbole rapportée à son centre et à ses axes.

Les deux courbes à centre sont donc représentées par l'équation $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$. Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes à l'un des sommets; pour avoir l'équation des deux courbes il faut remplacer x par $x - a$, on a

$$a^2y^2 \pm b^2(x-a)^2 = \pm a^2b^2;$$

simplifiant, elle se réduit à $a^2y^2 \mp 2ab^2x \pm b^2x^2 = 0$; la résolvant par rapport à y^2, elle devient

$$\text{(U)} \qquad y^2 = \mp \frac{b^2}{a^2}x^2 \pm \frac{2b^2}{a}x;$$

ce qui montre que les équations des courbes à centre peuvent être ramenées à la forme $y^2 = mx^2 + 2px$.

On a trouvé précédemment que l'équation de la parabole pouvait se ramener à la forme $Ay^2 + Ex = 0$; de sorte que si on pose $-\frac{E}{A} = 2p$, elle devient $y^2 = 2px$.

Donc toutes les courbes du second degré sont comprises dans l'équation

$$y^2 = mx^2 + 2px.$$

Dans le cas de l'hyperbole $m > 0$, dans le cas de l'ellipse $m < 0$, et dans celui de la parabole $m = 0$.

Enfin, si on veut les valeurs de m, p en fonction des demi-axes, l'équation (U) montre que $m = \frac{b^2}{a^2}$, $p = +\frac{b^2}{a}$.

Dans toutes les questions qu'on traitera sur les courbes du second degré, elles seront représentées par l'équation

Digitized by Google

$$y^2 = mx^2 + 2px.$$

Quand l'équation ne contient point le rectangle des variables, il faut, pour qu'elle représente une courbe à centre, que les termes en x^2 et y^2 existent, sans quoi $B^2 - 4AC = 0$, et la courbe serait une parabole.

Si le rectangle des variables existe, mais qu'il manque l'un des termes en x^2 ou y^2, la courbe représentée alors est toujours une hyperbole.

Pour que l'équation représente une parabole, le rectangle des variables n'existant pas, il faut que l'un des termes en x^2 ou y^2 n'existe pas; la condition $B^2 - 4AC = 0$ démontre la réciproque.

Théorème.

13.—Dans les courbes du second degré à centre, le rapport des carrés des ordonnées perpendiculaires au grand axe dans l'ellipse, ou à l'axe transverse dans l'hyperbole, est égal au rapport des rectangles compris sous les distances du pied de chaque ordonnée aux sommets.

Soient (x', y'), (x'', y'') les points d'où partent les ordonnées, on a

$$y'^2 = mx'^2 + 2px', \quad y''^2 = mx''^2 + 2px'',$$

d'où on déduit

$$\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{mx'\left(x' + \frac{2p}{m}\right)}{mx''\left(x'' + \frac{2p}{m}\right)} = \frac{x'\left(x' + \frac{2p}{m}\right)}{x''\left(x'' + \frac{2p}{m}\right)}.$$

Dans l'ellipse $\frac{2p}{m} = -2a$, alors l'égalité devient Fig. 15.

$$\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{x'(2a - x')}{x''(2a - x'')},$$

or,

$$x' = MA, \quad 2a - x' = MB, \quad x'' = M'A, \quad 2a - x'' = M'B,$$

Digitized by Google

donc

$$\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{MA \times MB}{M'A \times M'B}.$$

Ainsi pour cette courbe le théorème est démontré.

Fig. 16. Dans l'hyperbole $2a = \frac{2p}{m}$; ce qui donne

$$\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{x'(2a + x')}{x''(2a + x'')} = \frac{MA \times MB}{M'A \times M'B};$$

ce qui démontre le théorème.

Fig. 17. Dans le cas d'une circonférence $m = -1$, alors $y'^2 = (2p - x')x'$, car $y' = MP$, $x' = OP$, et $OA = 2p$, de sorte que $2p - x' = AP$, donc $\overline{MP}^2 = OP \times AP$; ce qui prouve que toute perpendiculaire à un diamètre dans cette courbe est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre. Le théorème général énoncé est donc démontré quelle que soit la courbe à centre que l'on considère.

L'équation de la parabole étant $y^2 = 2px$, montre que l'ordonnée de chaque point est moyenne proportionnelle entre le paramètre et l'abscisse de ce point; cette propriété donne un moyen facile de construire la courbe par points.

Fig. 18. Soient Ay, Ax les deux axes de coordonnées, prenons $AP = 2p$, puis $AB = x$; pour obtenir l'ordonnée correspondant à ce point, sur PB, décrivons comme diamètre une circonférence; soit M le point où elle coupe l'axe Ay; tirant par les points M, B des parallèles aux axes, le point I qu'on obtient par leur intersection est un point de la parabole; agissant de même pour l'abscisse AB', on obtiendra un second point I', et de même les points I'', I'''.....

Tangentes.

14. — On appelle tangente à une courbe une ligne qui, au point que l'on considère, est l'élément de la courbe prolongé indéfiniment dans les deux sens.

Dans les courbes du second degré, pour obtenir une tangente on mène une sécante, on la fait tourner autour d'un des points de sécance jusqu'à ce que l'autre vienne se confondre avec lui; quand les deux points sont ainsi réunis la droite est tangente; cette mé-

Digitized by Google

thode semble dire que la tangente est une ligne qui n'a qu'un point commun avec la courbe; on va montrer plus tard qu'elle remplit, ainsi déterminée, la condition d'une tangente à une courbe quelconque.

L'équation des courbes du second degré est $y^2 = mx^2 + 2px$, on va chercher son intersection avec la droite $y = \alpha x + \beta$, puis on exprimera que les deux points se sont réunis et la condition résultante sera celle pour que la ligne $y = \alpha x + \beta$ soit tangente à la courbe donnée.

$$(1) \qquad y^2 = mx^2 + 2px$$

$$(2) \qquad y = \alpha x + \beta.$$

En faisant exister simultanément les équations (1), (2), les coordonnées x, y doivent à la fois satisfaire à ces deux équations, par conséquent représentent celles des points d'intersection de ces lignes. D'après cette considération pour avoir leurs abscisses, éliminons y, il vient

$$(3) \qquad x^2 [\alpha^2 - m] + 2x [\beta\alpha - p] + \beta^2 = 0.$$

Pour exprimer que les deux points d'intersection se sont réunis en un seul, il faut et il suffit d'exprimer que les deux racines de l'équation (3) sont égales, car les x étant égaux, les y qu'on déduirait de l'équation (2) en y mettant pour x sa valeur, seront aussi égaux. La condition de l'égalité des racines de l'équation (3) donne

$$(4) \qquad m\beta^2 - 2\beta\alpha p + p^2 = 0.$$

Ainsi la condition à laquelle doit satisfaire la droite $y = \alpha x + \beta$ pour être tangente à la courbe $y^2 = mx^2 + 2px$ est l'équation (4). On voit qu'à une courbe du second degré il y a une infinité de tangentes, et que la condition de tangence n'entraîne qu'une équation entre les coefficients de la courbe et de la droite.

L'équation $y = \alpha x + \beta$ ayant deux coefficients indéterminés, il faut alors pour déterminer la droite deux conditions; supposons qu'en outre d'être tangente à la courbe donnée elle doive passer par le point x', y'; alors on a les deux équations (4), (5) qui, résolues, donneront les valeurs des coefficients α et β.

Digitized by Google

$$(4) \qquad m\beta^2 - 2\beta\alpha p + p2 = 0, \qquad (5) \quad y' = \alpha' x' + \beta;$$

il vient en effectuant les calculs

$$\alpha = \frac{y'(mx'+p) \mp p\sqrt{y'^2 - mx'^2 - 2px'}}{x'(mx'+2p)},$$

$$\beta = \frac{p}{mx'+2p}\left\{y' \pm \sqrt{y'^2 - mx'^2 - 2px'}\right\}.$$

L'équation de la tangente menée du point x', y' est alors

$$y = \frac{y'(mx'+p) \mp p\sqrt{y'^2 - mx'^2 - 2px'}}{x'(mx'+2p)}\,x + \\ + \frac{py' \pm p\sqrt{y'^2 - mx'^2 - 2px'}}{mx'+2p}.$$

On voit que toutes les fois que le point donné est tel que $y'^2 - mx'^2 - 2px' > 0$, on peut toujours mener par ce point deux tangentes à la courbe ; cette condition, pour qu'il ait deux tangentes, est celle qu'un point doit remplir pour être hors la courbe.

Pour le prouver, considérons d'abord le cas d'une ellipse ; alors dans l'équation $y^2 - mx^2 - 2px = 0$, $m < 0$, ce qui permet de la mettre sous la forme

$$y^2 + \left(x\sqrt{m} - \frac{p}{\sqrt{m}}\right)^2 - \frac{p^2}{m} = 0.$$

Fig. 19. Soit un point M quelconque hors la courbe, joignons-le à l'origine A, la ligne AM coupe l'ellipse en M', dont les coordonnées sont x', y' et pour lesquelles on a la relation

$$y'^2 + \left(x'\sqrt{m} - \frac{p}{\sqrt{m}}\right)^2 - \frac{p^2}{m} = 0;$$

alors pour le point M dont les coordonnées sont plus grandes que x', y' on aura

Digitized by Google

$$y^2 + \left(x\sqrt{m} - \frac{p}{\sqrt{m}}\right)^2 - \frac{p^2}{m} > 0.$$

Maintenant prenons un point M'' à l'intérieur de l'ellipse, tirons AM'', puis prolongeons cette ligne jusqu'à la rencontre de la courbe en M'; pour ce dernier point, on a

$$y'^2 + \left(x'\sqrt{m} - \frac{p}{\sqrt{m}}\right)^2 - \frac{p}{m} = 0,$$

par conséquent pour le point M'', on aura

$$y^2 + \left(x\sqrt{m} - \frac{p}{\sqrt{m}}\right)^2 - \frac{p^2}{m} < 0,$$

puisque ses coordonnées sont plus petites que celles du point M'. Donc le théorème est démontré pour l'ellipse.

Passons au cas de l'hyperbole; soit M un point hors la courbe et non situé entre les tangentes AH, A'H', tirons l'ordonnée MP, cette ligne coupe la courbe en M', pour lequel on a $y'^2 - mx'^2 - 2px' = 0$; alors pour le point M qui a même abscisse et une ordonnée plus grande, on aura $y^2 - mx^2 - 2px > 0$. Si le point était à l'intérieur en M'', on démontrerait de la même manière que ci-dessus qu'on a $y^2 - mx^2 - 2px < 0$. Fig. 20.

Supposons le point entre les parallèles AH, A'H', et tirons la parallèle KM' à Ax; soit M' le point où cette ligne coupe la courbe, on a, entre les coordonnées de ce dernier, la relation $y^2 - mx^2 - 2px = 0$; alors pour le point K on aura $y^2 - mx^2 - 2px > 0$, puisque son abscisse est moindre que celle du point M', et qu'il a même ordonnée. Ainsi le théorème est démontré pour l'hyperbole.

Considérons la parabole; soit un point extérieur M tel que son ordonnée coupe la courbe en M', pour lequel on a $y^2 - 2px = 0$; alors pour M on aura évidemment $y^2 - 2qx > 0$; de même si le point était intérieur en M'', on aurait $y^2 - 2px < 0$; prenons enfin un point N tel que son ordonnée ne rencontre pas la courbe, on aura $y^2 - 2px > 0$, puisque les deux termes y^2, $-2px$ sont positifs, p étant supposé plus grand que zéro et x étant négatif. Fig. 21.

Donc quelles que soient la position du point et la nature de la courbe,

Digitized by Google

$$(1) \qquad y'^2 - mx'^2 - 2px' > 0,$$

$$(2) \qquad y'^2 - mx'^2 - 2px' = 0,$$

$$(3) \qquad y'^2 - mx'^2 - 2px' < 0;$$

l'inégalité (1) exprime que le point est hors la courbe, l'équation (2) qu'il est sur la courbe, et enfin l'inégalité (3) qu'il est à l'intérieur de la courbe.

D'après ces considérations, on voit que toutes les fois que le point est hors la courbe on peut lui mener deux tangentes, que lorsqu'il est sur la courbe on ne peut en mener qu'une dont l'équation est

$$y = \frac{y'(mx'+p)}{x'(mx'+2p)}\,x + \frac{py'}{mx'+2p},$$

et enfin que lorsqu'il est à l'intérieur de la courbe il n'y a pas de tangente passant par ce point.

Prenons l'équation de la tangente en un point pris sur la courbe, et faisons disparaître le dénominateur, il vient

$$yx'(mx'+2p) = y'x(mx'+p) + py',$$

ou

$$y(mx'^2 + 2px') = y'x(mx'+p) + py'x',$$

mais le point x', y' étant sur la courbe, on a l'égalité

$$y'^2 = mx'^2 + 2px',$$

ce qui transforme l'équation en la suivante

$$yy' = mxx' + p(x + x').$$

Cette forme très-simple de la tangente peut se déduire facilement de l'équation de la courbe $y^2 = mx^2 + 2px$, en la mettant sous la forme $yy = mxx + px + px$, puis remplaçant dans les termes du second degré l'un des y et l'un des x par y', x' et dans l'un des termes du premier degré x par x'.

Cette forme se conserve encore lorsqu'à la place de m, p, on met leurs valeurs en fonction des axes. On a trouvé que l'équation $y^2 = mx^2 + 2px$ représentait les deux équations

Digitized by Google

$$y^2 = \mp \frac{b^2}{a^2} x^2 \pm \frac{2b^2}{a} x;$$

en suivant la règle énoncée ci-dessus pour la formation de l'équation de la tangente, on aura $yy' = \mp \frac{b^2}{a^2} xx' \pm \frac{b^2}{a} (x+x')$; or elle se déduit de l'équation générale en mettant pour m, p, leurs valeurs $m = \mp \frac{b^2}{a^2}$, $p = \pm \frac{b^2}{a}$.

En appliquant la méthode qu'on a suivie aux courbes rapportées à leur centre dont l'équation est $y^2 + mx^2 = p$, on trouverait que la tangente a pour équation $yy' + mxx' = p$.

On peut le prouver sur l'équation $yy' = mxx' + p(x + x')$, car transportons l'origine des coordonnées au centre, l'équation de la courbe devient

$$y^2 = m\left(x - \frac{p}{m}\right)^2 + 2p\left(x - \frac{p}{m}\right) \text{ ou } y^2 = mx^2 - \frac{p^2}{m};$$

celle de la tangente devient

$$yy' = m\left(x - \frac{p}{m}\right)\left(x' - \frac{p}{m}\right) + p\left(x - \frac{p}{m} + x' - \frac{p}{m}\right);$$

simplifiant, elle se réduit à $yy' = mx'x - \frac{p^2}{m}$, ce qui est la forme annoncée.

Donc l'équation d'une tangente à une courbe du second degré, soit que cette courbe soit rapportée à son centre ou à son sommet, peut s'obtenir immédiatement quand le point donné est sur la courbe.

On va prouver que tous les points d'une tangente, hormis le point de contact, sont situés en dehors de la courbe.

L'équation de la tangente au point x', y' est

$$yy' = mxx' + p(x + x');$$

pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que pour un point quelconque de cette ligne on a $y^2 - mx^2 - 2px > 0$. Le point x', y' étant sur la courbe, on a l'égalité $y'^2 = mx'^2 - 2px'$.

Digitized by Google

$$(1) \qquad yy' = mxx' + p(x + x'),$$

$$(2) \qquad y'^2 = mx'^2 + 2px'.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par 2, puis retranchons cette équation membre à membre de $y'^2 = mx'^2 + 2px'$, il vient $y'^2 - 2yy' = mx'^2 - 2mxx' - 2px$. Cette dernière est toujours l'équation de la tangente seulement sous une autre forme ; on peut aux deux membres ajouter la même quantité $y^2 + mx^2$ sans qu'elle soit altérée, il vient alors

$$(3) \qquad (y - y')^2 = m(x - x')^2 + y^2 - mx^2 - 2px.$$

L'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$(yy')^2 - m(x - x')^2 = y^2 + mx^2 - 2px;$$

le premier membre est toujours positif dans le cas de $m < 0$, donc le second l'est aussi, c'est-à-dire qu'on a toujours

$$y^2 - mx^2 - 2px > 0;$$

cette démonstration ne peut s'appliquer qu'à deux cas, celui où $m < 0$ et $m = 0$. On va suivre une autre méthode qui s'applique quelle que soit l'hypothèse qu'on fasse sur m.

Il faut prouver que pour une tangente on a toujours

$$y^2 - mx^2 - 2px > 0.$$

De l'équation de la tangente, on tire $y = \dfrac{mxx' + p(x + x')}{y'}$; en conséquence l'expression $y^2 - mx^2 - 2px$ devient

$$y^2 - mx^2 - 2px = \frac{(mxx' + p(x + x'))^2}{y'^2} - mx^2 - 2px;$$

remplaçant y'^2 par sa valeur $mx'^2 + 2px'$, puis ensuite effectuant les calculs, on a

$$y^2 - mx^2 - 2px = \left.\begin{array}{l} \dfrac{m^2x^2x'^2 + p^2(x^2 + 2xx' + x'^2 +) 2mp(x^2x' + xx'^2)}{y'^2} \\ \underline{- m^2x^2x'^2 - 2mpx^2x' - 2mpxx'^2 - 4p^2xx'} \end{array}\right\};$$

Digitized by Google

simplifiant le plus possible le numérateur de la fraction du second membre, l'égalité se réduit à $y^2 - mx^2 - 2px = \frac{p^2(x-x')^2}{y'^2}$.

Donc quel que soit le point de la droite que l'on prenne, on a $y^2 - mx^2 - 2px > 0$, à l'exception du point x', y' de contact pour lequel on a $y'^2 - mx'^2 - 2px' = 0$.

Donc tous les points de la tangente dans une courbe du second degré sont hors la courbe, hormis le point de contact.

Cette démonstration s'applique comme on le voit à une quelconque des trois courbes du second degré.

On démontrera plus tard cette même propriété de la tangente par des considérations géométriques.

Construction des tangentes menées d'un point hors la courbe.

15.—Soient x', y' les coordonnées du point donné hors la courbe, la question à résoudre consiste à trouver les points de contact, car en les joignant au point donné, on aurait les tangentes. Pour y arriver, cherchons l'équation de la sécante passant par ces deux points : soient (x'', y'') le premier point de contact, (x''', y''') le deuxième, l'équation de la tangente au premier point est

$$yy'' = mxx'' + p(x + x''),$$

celle de la tangente au deuxième est

$$yy''' = mxx''' + p(x + x''');$$

ces deux lignes devant passer au point donné on a les égalités (1), (2).

$$(1) \qquad y'y'' = mx'x'' + p(x' + x'')$$

$$(2) \qquad y'y''' = mx'x''' + p(x' + x''').$$

De là on déduit que l'équation de la sécante passant par les deux points de contact est $y'y = mxx' + p(x + x')$, puisque cette équation, qui est celle d'une droite, doit être satisfaite simultanément par les coordonnées x'', y''; x''', y''' des points de contact.

Ainsi, connaissant x', y', on peut construire facilement la droite $yy' = mxx' + p(x + x')$, et par son intersection avec la courbe on aura les points de contact, et par suite les deux tangentes cherchées.

Digitized by Google

Cette méthode qui est celle de l'intersection de deux lieux, dont l'un est la courbe donnée et l'autre une droite, est un cas particulier d'une méthode plus générale, qui consiste en ce que les deux points de contact sont donnés par l'intersection de la courbe proposée avec une autre courbe du même genre.

L'équation de la sécante passant par les deux points de contact a été trouvée de la forme $yy' = mxx' + p(x + x')$; si on la fait exister simultanément avec l'équation de la courbe $y^2 = mx^2 + 2px$, x, y désigneront les coordonnées des points de contact des tangentes menées du point x', y'.

$$(3) \qquad y^2 = mx^2 + 2px$$

$$(4) \qquad yy' = mxx' + p\,(x + x').$$

Multiplions les membres de l'équation (4) par le facteur numérique K, et ajoutons l'équation résultante (3) membre à membre, il vient l'équation (5) :

$$(5) \quad y^2 + \mathrm{K}yy' = mx^2 + \mathrm{K}mxx' + 2px + \mathrm{K}p\,(x + x'),$$

dans laquelle x, y représentent les coordonnées des points de contact, tant qu'elle existe simultanément avec l'équation (3).

L'équation (5) peut se mettre sous la forme

$$y^2 + \mathrm{K}yy' + \frac{\mathrm{K}^2 y'^2}{4} = m\left[x^2 + \mathrm{K}xx' + \frac{\mathrm{K}^2 x'^2}{4}\right] +$$
$$+ 2p\left[x + \frac{\mathrm{K}x}{2}\right] + \frac{\mathrm{K}^2 y'^2}{4} - m\frac{\mathrm{K}x'^2}{4} + 2p\frac{\mathrm{K}x'}{2};$$

pour y arriver on n'a fait qu'ajouter aux deux membres des quantités égales et connues; enfin cette dernière équation peut se ramener à la forme

$$(6) \quad \left(y + \mathrm{K}\frac{y'}{2}\right)^2 = m\left[x + \mathrm{K}\frac{x'}{2}\right]^2 + 2px\left[1 + \frac{\mathrm{K}}{2}\right] +$$
$$+ \mathrm{K}^2\frac{y'^2}{4} - m\mathrm{K}^2\frac{x'^2}{4} + 2p\frac{\mathrm{K}x'}{2}.$$

On voit que la courbe donnée par l'équation (6) est une courbe du même genre que la courbe proposée; en outre que ces deux courbes

Digitized by Google

ont leurs axes parallèles, et que les coordonnées du sommet de la seconde sont

$$y = -\mathrm{K}\frac{y'}{2},$$

$$x = \frac{m\frac{\mathrm{K}}{2}x + p\left(1+\frac{\mathrm{K}}{2}\right) \pm \sqrt{p^2\left(1+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)^2 - \frac{m\mathrm{K}^2}{4}\left(y'^2 - mx'^2 - 2px'\right)}}{m.}$$

Ainsi, en construisant la courbe que donne l'équation (6), les points où elle coupera la courbe donnée seront les points de contact des tangentes demandées.

On peut donner au facteur K toute espèce de valeurs réelles, soit positives ou négatives.

Reprenons l'équation de la sécante passant par les points de contact, puis cherchons celle de la droite passant par le point x', y' et le centre de la courbe dont les coordonnées sont $x = -\frac{p}{m}, y = 0$.

D'après la formule $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$, on a pour l'équation de la droite en question

$$y = \frac{y'}{x + \frac{p}{m}}\left(x + \frac{p}{m}\right) \quad \text{ou} \quad y = \frac{my'}{mx + p}\left(x + \frac{p}{m}\right).$$

Désignons par α, α' les tangentes des angles que font ces deux droites avec l'axe des x, on a

$$\alpha = \frac{mx' + p}{y'}, \quad \alpha' = \frac{my'}{mx' + p},$$

de là on déduit $\alpha\alpha' = m$; donc dans toute courbe du second degré le produit des tangentes des angles que font avec l'axe des x, la sécante passant par les points de contact de deux tangentes, et la ligne qui va du centre au point où se coupent ces deux tangentes est constant. Dans l'ellipse ce produit $\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$, et dans l'hyperbole $\alpha\alpha' = \frac{b^2}{a^2}$; dans la circonférence $\alpha\alpha' = -1$, donc $1 + \alpha\alpha' = 0$; c'est-à-dire que les deux lignes décrites ci-dessus sont perpendiculaires.

Digitized by Google

Fig. 22. Ainsi on voit que si d'un point hors d'une circonférence OA, on mène deux tangentes MP, MQ, puis qu'on joigne leurs points de contact P, Q, la ligne ainsi obtenue est perpendiculaire sur la ligne qui va du point donné au centre O de la courbe.

Des tangentes à une courbe algébrique.

16.—Considérons un point M sur une courbe quelconque; la tangente PQ en ce point est la ligne qui a de commun avec la courbe l'élément infiniment petit sur lequel se trouve le point M. Pour trouver son équation, on va supposer une sécante passant par le point M et tournant autour de ce point jusqu'à ce que son second point de sécance vienne se confondre avec le point extrême de l'élément où se trouve M.

L'équation de la droite passant par les points M, N, dont les coordonnées sont x', y', $x'+\Delta x'$, $y+\Delta y'$, est

$$y-y'=\frac{(y'+\Delta y')-y'}{(x'+\Delta x')-x'}(x-x') \quad \text{ou} \quad y-y'=\frac{\Delta y'}{\Delta x'}(x-x').$$

Fig. 23. Si le point N va en se rapprochant de M, l'équation sera toujours de même forme, à cela près que $\Delta x'$, $\Delta y'$ diminueront; quand N sera arrivé à l'extrémité de l'élément qui contient M, $\Delta x'$, $\Delta y'$ seront dx', dy'; alors l'équation de la sécante, qui deviendra la tangente en M, est $y-y'=\frac{dy}{dx}(x-x')$.

Si l'équation de la courbe est de la forme $y=f(x)$, $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ et l'équation de la tangente en x', y' devient $y-y'=f'(x')(x-x')$.

Si l'équation de la courbe est implicite, $f(x,y)=0$.

Pour obtenir $\frac{dy}{dx}$ il faut différentier l'équation, et on a

$$dx\frac{d.f(x,y)}{dy}+dy\frac{d.f(x,y)}{dy}=0, \text{ d'où } \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d.f(x,y)}{dx}}{\frac{d.f(x,y)}{dy}};$$

en conséquence l'équation de la tangente est

$$(y-y')\frac{d.f(x,y)}{dy}+(x-x')\frac{d.f(x,y)}{dx}=0.$$

Digitized by Google

Il est bien entendu que $\frac{d.f(x,y)}{dy}$, $\frac{d.f(x,y)}{dx}$, qui sont les dérivées de $f(x,y)$ par rapport à x et à y, ne sont plus fonctions que de x' et de y', quantités connues, puisqu'elles sont les coordonnées du point de contact.

La méthode qu'on a suivie pour obtenir les tangentes des courbes du second degré est à peu près la méthode générale, à cela près que, brusquement, on a cherché la condition pour que les deux points de sécance se réunissent en un seul, tandis que pour la tangente d'une courbe quelconque on a exprimé que la sécante se confondait avec l'élément de la courbe conformément à la définition.

On va montrer que dans les courbes du second degré, par la méthode qu'on a suivie, la tangente remplit la condition générale pour qu'une droite soit tangente.

On a trouvé que l'équation qui donne les abscisses des points d'intersection de la droite $y = \alpha x + \beta$ avec la courbe représentée par $y^2 = mx^2 + 2px$, est

$$(1) \qquad x^2(\alpha^2 - m) + 2x(\beta\alpha - p) + \beta^2 = 0.$$

Soit (x', y') le point de contact; pour que α, β soient les coefficients d'une tangente il faut que l'équation soit satisfaite par x' et $x' + dx'$; ce qui donne les deux conditions :

$$(2) \qquad x'^2(\alpha^2 - m) + 2x'(\beta\alpha - p) + \beta^2 = 0,$$

$$(3) \qquad (x' + dx')^2(\alpha^2 - m) + 2(x' + dx')(\beta\alpha - p) + \beta^2 = 0.$$

Développant l'équation (3), il vient

$$x'^2(\alpha^2 - m) + 2x'(\beta\alpha - p) + \beta^2 + 2x'\,dx'(\alpha^2 - m) + \\ + 2dx'(\beta\alpha - p) + dx'^2(\alpha^2 - m) = 0.$$

On voit qu'à l'aide de l'équation (2) elle se simplifie et devient

$$dx'^2(\alpha^2 - m) + 2x'\,dx'(\alpha^2 - m) + 2dx'(\beta\alpha - p) = 0.$$

Divisant les deux membres par dx', et négligeant l'infiniment petit $dx'(\alpha^2 - m)$ devant les quantités finies, l'équation (3) devient $x'(\alpha^2 - m) + \beta\alpha - p = 0$, d'où $x' = -\frac{\beta\alpha - p}{\alpha^2 - m}$; portant cette valeur

Digitized by Google

dans l'équation (1), on a $\frac{(\alpha^2-m)(\beta\alpha-p)^2}{(\alpha^2-m)^2}-\frac{2(\beta\alpha-p)^2}{\alpha^2-m}+\beta^2=0$; simplifiant, il vient $m\beta^2-2\beta\alpha p+p^2=0$, condition qui est celle qu'on a trouvée par la méthode des racines égales.

On eût pu démontrer que la tangente $yy'=mxx'+p(x+x')$ avait un élément de commun avec la courbe, en appliquant à l'équation $y^2=mx^2+2px$ la formule générale des tangentes, et on eût trouvé qu'elle est identique avec celle donnée par la méthode qu'on a suivie. Le procédé suivi pour les courbes du second degré ne peut pas se généraliser, en l'appliquant à une courbe d'un degré différent.

Des sous-tangentes.

17.—On appelle sous-tangente la partie de l'axe des x comprise entre le point où une tangente coupe cet axe et le pied de l'ordonnée du point de contact.

Fig. 24. Soit MN une tangente, la sous-tangente correspondante est $MP=AP+AM$; on voit que pour avoir la sous-tangente, il faut dans cette position des axes de coordonnées et du point considéré ajouter à l'abscisse du point de contact, celle du point où la droite coupe l'axe des x.

L'équation de la tangente au point N est

$$yy'=mxx'+p(x+x');$$

faisant $y=0$, on en déduit $x=\frac{-px'}{mx'+p}$; remarquons que l'abscisse du point M est négative, en conséquence pour avoir la sous-tangente il faut changer son signe, alors

$$MP=x'+\frac{px'}{mx'+p}=\frac{mx'^2+2px'}{mx'+p}.$$

Cherchons quelle est sa valeur dans le cas de l'ellipse; pour cela remplaçons m, p par $-\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{b^2}{a}$, il vient

$$MP=\frac{x'\left(-\frac{b^2}{a^2}x'+\frac{2b^2}{a}\right)}{-\frac{b^2}{a^2}x'+\frac{b^2}{a}}=\frac{x'(2a-x')}{a-x'}.$$

Digitized by Google

On voit que MP ou la sous-tangente est indépendante du petit axe et de l'ordonnée du point de contact, donc toutes les ellipses qui ont même grand axe, ont même sous-tangente, lorsque les points de contact des tangentes sont sur la même parallèle à l'axe des y. Cette même propriété a lieu pour les hyperboles.

On tire de là une méthode simple pour mener en un point donné une tangente à l'ellipse. Supposons qu'on demande la tangente au point M, pour la tracer il suffit d'en obtenir un second point; sur le grand axe AB je décris une circonférence comme diamètre, je prolonge l'ordonnée MB jusqu'en M', ces deux courbes ont, d'après la propriété citée ci-dessus, même sous-tangente; or, en menant la tangente M'T à la circonférence, on obtient BT pour la sous-tangente commune, et par suite MT est la tangente à l'ellipse demandée. Fig. 25.

Cette propriété des sous-tangentes prises relativement à l'axe des x, s'observe encore relativement à l'axe des y, dans l'ellipse.

L'équation de l'ellipse rapportée à son centre est $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$; la sous-tangente au point x', y' prise sur l'axe des y est la différence entre l'ordonnée du point où la tangente coupe l'axe des y et l'ordonnée du point de contact; l'équation de la tangente est $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$; y faisant $x = 0$, on a Fig. 26.

$$y = \frac{b^2}{y'} = \text{OT}', \text{ donc DT}' = \frac{b^2}{y'} - y' = \frac{b^2 - y'^2}{y'}.$$

Donc toutes les ellipses qui auront même petit axe b, auront même sous-tangente lorsque les points de contact des tangentes seront sur la même parallèle à l'axe des x.

D'après cela si on veut la tangente au point M, on décrit sur le petit axe comme diamètre une circonférence, on tire par le point M une parallèle à Ax jusqu'en M'', en ce point on tire la tangente à la circonférence qu'on prolonge jusqu'en T', joignant T' à M on a la tangente demandée; cette seconde méthode graphique peut être employée comme vérification pour une tangente obtenue par le premier procédé. Fig. 25.

Cette propriété existe encore pour l'hyperbole, mais pour obtenir la sous-tangente prise relativement à l'axe des y il faut toujours à l'ordonnée y' du point de contact joindre l'ordonnée du point où la tangente coupe l'axe des y prise en signe contraire, car

Digitized by Google

Fig. 27. cette ordonnée a pour expression $\frac{-b^2}{y'}$, ce qui montre qu'elle est toujours de signe contraire à y'; et comme la sous-tangente est la somme des deux ordonnées y' et $-\frac{b^2}{y'}$, on voit donc pourquoi il faut changer le signe de l'expression $\frac{-b^2}{y'}$; ainsi on aura

$$NT = \frac{b^2}{y'} + y' = \frac{b^2 + y'^2}{y'}.$$

Donc dans les courbes du second degré à centre les sous-tangentes, soit qu'elles soient prises sur l'axe des x ou sur l'axe des y, sont indépendantes de l'axe de la courbe compté sur l'axe des y ou l'axe des x.

L'expression $\frac{mx^2 + 2px'}{mx' + p}$ de la sous-tangente a été démontrée applicable dans le cas où $x' > 0$, et l'abscisse du point où la tangente coupe l'axe des x négative, on suppose d'ailleurs $p > 0$; ce fait ayant toujours lieu dans une parabole quel que soit le point de contact, il s'ensuit que la formule est applicable dans tous les cas pour cette courbe.

Dans l'ellipse elle n'est applicable que pour les points situés sur la courbe entre l'origine et les deux sommets, extrémités du petit
Fig. 26. axe; cherchons ce que devient la formule pour l'autre cas. Soit M'T la tangente, la sous-tangente est TP; d'après la figure on voit que $TP = BT - BP = BT - x'$. L'équation de la tangente étant $yy' = mxx' + p(x + x')$, on en tire $BT = \frac{-px'}{mx' + p}$, par conséquent $TP = -\frac{mx'^2 + 2px'}{mx' + p}$; on voit que c'est l'expression obtenue prise en signe contraire.

Considérons l'hyperbole, prenons un point tel que son abscisse soit de signe contraire à l'abscisse du point de la tangente situé sur l'axe des x, on aura

$$T'P = AP + AT' = -x' - \frac{px'}{mx' + p} = -\frac{mx'^2 + 2px}{mx' + p};$$

Digitized by Google

enfin prenons un point sur la seconde branche en M', on aura NT, qui est la sous-tangente, égale à Fig. 28.

$$AN - AT = x' - \frac{-px'}{mx'+p} = \frac{mx'^2 + 2px'}{mx'+p} = NT.$$

On voit que dans ces diverses courbes et dans les positions que le point de contact peut obtenir sur elles, l'expression de la sous-tangente est $\frac{mx'^2+2px'}{mx'+p}$, abstraction faite du signe, puisque c'est une quantité essentiellement positive.

Considérons le cas de la parabole, il faut faire $m = 0$ dans l'expression $\frac{mx'^2+2px'}{mx'+p}$ de la sous-tangente, elle se réduit à $2x'$; donc dans la parabole la sous-tangente est double de l'abscisse; cette propriété permet de mener facilement une tangente par un point donné sur cette courbe; en effet, soit M le point donné, $AT' = x'$, donc si on prend $AT' = AT$, $TT' = 2x'$ sera la sous-tangente, et par suite MT la tangente demandée. On va démontrer que parmi les courbes du second degré la parabole est la seule où la sous-tangente soit double de l'abscisse. Fig. 29.

En effet, l'expression générale de la sous-tangente est

$$\frac{mx'^2 + 2px'}{mx'+p}, \text{ posons } \frac{mx'^2+2px'}{mx'+p} = 2x';$$

cherchons la condition pour que cette égalité ait lieu quel que soit x'; réduisant les deux membres au même dénominateur et le supprimant, on a $mx'^2 + 2px' = 2mx'^2 + 2px'$ et enfin $mx'^2 = 0$, ce qui exige que $m = 0$, c'est-à-dire que la courbe soit une parabole.

Nous allons démontrer que plus généralement la parabole est la seule courbe algébrique où la sous-tangente soit double de l'abscisse.

En effet, $MT' = TT' \text{ tang } MTT'$, d'où $TT' = \frac{MT'}{\text{tang } MTT'}$; or Fig. 29.

$MT' = y$, $\text{tang } MTT' = \frac{dy}{dx}$. Posant $TT' = 2x$, on a l'équation

$2x = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$; intégrant il vient

Digitized by Google

$$ly = \frac{1}{2} lx + c;$$

posons $c = l\mathrm{A}$, l'intégrale devient $ly = \frac{1}{2} lx + l\mathrm{A} = l\mathrm{A}x^{\frac{1}{2}}$, et enfin $y^2 = \mathrm{A}^2 x$; équation qui est celle des paraboles du second degré.

Donc la parabole est la seule courbe algébrique où la sous-tangente soit double de l'abscisse du point de contact de la tangente correspondante.

Des normales.

18.—On appelle normale à une courbe la ligne perpendiculaire à la tangente au point où cette ligne coupe la courbe.

Soit (α, β) le point d'où on propose de mener une normale à la courbe $y^2 = mx^2 + 2px$, son équation sera de la forme $y - \beta = \mathrm{A}(x - \alpha)$; soit (x', y') le point où elle coupe la courbe, la tangente en ce point a pour équation $yy' = mxx' + p(x + x')$; la ligne $y - \beta = \mathrm{A}(x - \alpha)$ devant lui être perpendiculaire, on a

$$\mathrm{A} = \frac{-y'}{mx' + p}.$$

Donc l'équation de la normale est

$$y - \beta = \frac{-y'}{xm' + p}(x - \alpha).$$

Maintenant il reste à déterminer x', y'; comme ce point doit être en même temps sur la courbe et sur la normale, on a les deux équations (1), (2), d'où on va déduire x', y'.

$$(1) \qquad y'^2 = mx'^2 + 2px',$$

$$(2) \qquad y' - \beta = \frac{-y'}{mx' + p}(x' + \alpha).$$

De l'équation (2) on tire

$$y'(mx' + p) - \beta(mx' + p) = -y'(x' - \alpha),$$

ordonnant par rapport à y', on a

$$y'[x'(1 + m) + p - \alpha] = \beta(mx' + p),$$

Digitized by Google

d'où $y' = \frac{\beta(mx'+p)}{x'(1+m)+p-\alpha}$. Transportant cette valeur dans l'équation (1), on a l'équation

$$(3) \qquad \begin{aligned} &x'^4(1+m)^2 m + 2x'^3[m(1+m)(p-\alpha)+p(1+m)^2]+ \\ &+x'^2[m(p-\alpha)^2+4p(p-\alpha)(1+m)-m^2\beta^2]+ \\ &+x'[2p(p-\alpha)^2-2mp\beta^2]-p^2\beta^2=0. \end{aligned}$$

Ainsi on voit que la solution de la question, dans le cas général, dépend d'une équation du quatrième degré. Si toutes les racines sont réelles on peut trouver quatre points qui, joints au point (α, β), donnent des lignes normales à la courbe; mais il peut arriver que ces lignes ne soient pas au nombre de quatre distinctes les unes des autres, car il y a certaines lignes qui coupant une courbe du second degré en deux points sont normales à la courbe en ces points; cette observation fait voir que l'équation (3) ne peut point donner par le nombre de ses racines réelles celui des normales qu'on peut mener du point (α, β). On va le montrer plus loin par un exemple.

Dans l'hyperbole le coefficient $m(1+m^2)$ étant toujours positif, et le terme $-p^2\beta^2$ toujours négatif, il s'ensuit que l'équation en x' a toujours deux racines réelles de signe contraire. Donc quelle que soit la position du point (α, β), on peut toujours mener deux normales à la courbe, et il y en a une pour chaque branche de l'hyperbole.

Supposons le point donné sur l'axe des x, ainsi $\beta=0$, l'équation (3) devient

$$\begin{aligned} &x'^4[(1+m)^2 m]+2x'^3[m(p-\alpha)(1+m)+p(1+m)^2]+ \\ &+x'^2[m(p-\alpha)^2+4p(p-\alpha)(1+m)]+2px'(p-\alpha)=0. \end{aligned}$$

On voit que l'une des racines de cette équation est $x'=0$, c'est-à-dire que l'axe des x est une des normales; les autres normales sont données par l'équation du troisième degré

$$\begin{aligned} &x'^3(1+m)^2 m+2x'^2[m(p-\alpha)(1+m)+p(1+m)^2]+ \\ &+x'[m(p-\alpha)^2+4p(p-\alpha)(1+m)]+2p(p-\alpha)=0. \end{aligned}$$

L'équation (3) n'est susceptible d'abaissement que dans deux cas, $m=-1$, $m=0$; le premier est celui d'une circonférence et le second celui d'une parabole. Considérons le cas $m=-1$, il vient

Digitized by Google

$$(4) \qquad x'^2[\beta^2+(p-\alpha)^2]-2x'[p(p-\alpha)^2+p\beta^2]+p^2\beta^2=0.$$

Combinant l'équation (4) avec l'équation (2), on obtient

$$x'=p\pm\frac{p(p-\alpha)}{\sqrt{\beta^2+(p-\alpha^2)}},\quad y'=\pm\frac{p\beta}{\sqrt{\beta^2+(p-\alpha)^2}}.$$

En joignant le point (β, α) aux deux points donnés par les valeurs de x' et y', on a en théorie deux normales, mais on sait à priori qu'il n'y en a qu'une, qu'on obtient en joignant le centre au point donné, et la prolongeant au delà du centre. Comme on démontre en géométrie qu'elle est normale aux deux points où elle coupe la courbe et qu'il n'y a de normale que la ligne qui passe au centre, voilà ce qui explique les deux points donnés par le calcul, qui semblent au premier aspect fournir deux normales.

Cherchons les valeurs de x' et y' directement par la géométrie.
Fig. 30. Soit donc AO la circonférence, puis M le point donné; faisant passer par le centre O et le point M une droite, les points N et P sont ceux que le calcul doit avoir donnés; posons $MB=\beta$, $AB=\alpha$, alors $NC=y'$, $AC=x'$. Des triangles semblables MOB, NOC, on tire $MB : NC :: OM : ON$ ou $\beta : y' :: OM : ON$, mais

$$ON=OA=p,\quad OM=\sqrt{\overline{MB}^2+\overline{OB}^2}=\sqrt{\beta^2+(p-\alpha)^2},$$

donc $y'=\dfrac{p\beta}{\sqrt{\beta^2+(p-\alpha)^2}}$; pour le point P, $PC'=NC$, mais de signe contraire, donc $PC'=-\dfrac{p\beta}{\sqrt{\beta^2+(p-\alpha)^2}}$, alors ces deux points ont des ordonnées qui sont fournies par l'équation $y'=\pm\dfrac{p\beta}{\sqrt{\beta^2+(p-\alpha)^2}}$. Des mêmes triangles semblables considérés plus haut, on déduit

$$OB : OC :: OM : ON \quad \text{ou} \quad (p-\alpha) : x' :: \sqrt{\beta^2+(p-\alpha)^2} : p,$$

d'où $x'=-\dfrac{p(p-\alpha)}{\sqrt{\beta^2+(p-\alpha)^2}}$. Le point P donne $AC'=p+OC=p+\dfrac{p(p-\alpha)}{\sqrt{\beta^2+(p-\alpha)^2}}$, donc les abscisses des points N et P sont

Digitized by Google

$$x' = p \pm \frac{p(p-\alpha)}{\sqrt{\beta^2 + (p-\alpha)^2}}.$$

Par la coïncidence des résultats donnés par l'analyse et la géométrie, on en déduit ce théorème, que dans une circonférence toute ligne passant par le centre est perpendiculaire aux tangentes où elle coupe la courbe. Considérons le cas de $m = 0$. L'équation (3) devient

$$(4) \qquad x'^3 + 2x'^2(p-\alpha) + x'(p-\alpha)^2 - \frac{1}{2}p\beta^2 = 0.$$

On voit que dans le cas d'une parabole le problème dépend du troisième degré. Supposons le point donné sur l'axe des x, $\beta = 0$, alors on a

$$x'[x' + (p+\alpha)]^2 = 0,$$

équation qui peut être satisfaite par $x' = 0$, ce qui prouve que l'axe des x est une des trois normales, ou bien par $x' + p - \alpha = 0$; si p est positif, x' est aussi positif, donc $x' + p - \alpha$ ne peut être nul que si α est plus grand que p. Supposons $\alpha = p$, x' est alors zéro; donc si sur l'axe on prend à partir de l'origine $AP_1 = p$, entre le point A et P_1 il n'y a point de normale à la courbe; au point P_1 les trois normales se réduisent à l'axe de la parabole, et enfin au delà du point P_1 il y a trois normales, dont deux sont symétriquement placées par rapport à l'axe. De cette discussion on déduit que les normales à la parabole coupent l'axe au delà du point P_1 pour lequel $y = 0$, $x = p$. Fig. 32.

L'équation $(x' + p - \alpha) = 0$ prouve que dans la parabole la sous-normale est constante et égale au demi-paramètre. Car soit M un point quelconque de la courbe, la normale en ce point coupe l'axe en B; posons $AB = \alpha$, puis $AP = x'$, d'après l'égalité $x' = \alpha - p$, on voit que la sous-normale PB est égale à p, car $x' = AB - BP = \alpha - p$. Donc dans la parabole la sous-normale est constante et égale au demi-paramètre. Fig. 32.

19.—L'équation (4) permet de trouver le lieu des points tels que de chacun d'eux on ne peut mener que deux normales à la parabole.

Ce lieu sera donné par la condition qui doit exister entre α et β pour que l'équation (4) ait deux racines égales. Désignons par a et b les deux racines différentes de cette équation, on aura

Digitized by Google

$$(x-a)^2(x-b)=x^3+2x^2(p-\alpha)+(p-\alpha)^2x-\frac{1}{2}p\beta^2=0.$$

Effectuant les calculs indiqués dans le premier membre et égalant les coefficients des mêmes puissances de x, dans les deux membres, on a les équations suivantes

$$\text{(X)}\qquad 2a+b=2(\alpha-p),$$
$$\text{(Y)}\qquad a(a+2b)=(p-\alpha)^2,$$
$$\text{(Z)}\qquad a^2b=\frac{1}{2}p\beta^2.$$

Éliminant entre (X) et (Y) la racine b, on a $a=\alpha-p$, $a=\frac{\alpha-p}{3}$, valeurs auxquelles correspondent $b=0$, $b=\frac{4(\alpha-p)}{3}$. Transportant ces valeurs dans l'équation (Z), le premier système donne $\beta=0$, puis le second $\frac{1}{2}p\beta^2=\frac{4}{27}(\alpha-p)^3$, équation qu'on peut mettre sous la forme

$$\beta^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}p^{-\frac{1}{3}}(\alpha-p).$$

Ainsi on voit que dans la parabole il y a deux lieux répondant à la question algébrique. Le premier $\beta=0$ donne l'axe des x, c'est-à-dire l'axe de la courbe, mais il ne commence qu'au point P, pour lequel $x=p$, car on a trouvé $a=\alpha-p$, et comme a représente l'abscisse du point où une des normales coupe la courbe, quantité qui est toujours positive puisque $p>0$, il s'ensuit que $\alpha>p$.

Si on examine de près la solution, on voit que de chaque point du lieu il y a trois normales à la parabole au lieu de deux comme le calcul semble l'indiquer; cela tient à ce que les abscisses des points où les deux normales symétriques, par rapport à l'axe des x, coupent la courbe, sont égales; ainsi on voit que la première solution ne répond point à la question; c'est la conséquence encore de ce que le calcul ne donne point les normales, mais les points où elles coupent la courbe. On eût évité cette solution étrangère en déterminant les ordonnées des points d'intersection au lieu des abscisses, parce qu'à une ordonnée ne correspond qu'un point sur

Digitized by Google

la courbe, tandis qu'à une abscisse il en correspond deux. Du reste il suffit de remplacer dans l'équation (4) x' par $\frac{1}{2p}y'^2$ et de suivre la méthode exposée pour s'assurer qu'il n'y a que le second lieu qui répond à la question.

Le lieu, tel que de chacun de ses points on ne peut mener que deux normales à la courbe ayant pour équation $\beta^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}p^{-\frac{1}{3}}(\alpha - p)$, est, comme on le verra plus tard, la développée de la parabole, et ce sera lorsqu'on traitera des développées qu'on discutera cette courbe.

20.—Cherchons la relation qui doit exister entre α et β pour que les racines de l'équation (4) soient égales. A cet effet posons

$$(x' - a)^3 = x'^3 + 2(p - \alpha)x'^2 + (p - \alpha)^2 x' - \frac{1}{2}p\beta^2 = 0.$$

Développant le premier membre, il vient

$$x'^3 - 3ax'^2 + 3a^2x' - a^3 = x'^3 + 2(p - \alpha)x'^2 + (p - \alpha)^2 x' - \frac{1}{2}p\beta^2 = 0;$$

égalant les coefficients des mêmes puissances des x' dans les deux membres, on a les trois équations

$$-3a = 2(p - \alpha), \quad 3a^2 = (p - \alpha)^2, \quad +a^3 = \frac{1}{2}p\beta^2,$$

équations qui ne peuvent exister que pour $\alpha = p$, et $\beta = 0$ en est la conséquence.

Donc il n'y a qu'un point qui est déterminé par $y = 0$, $x = 0$, pour lequel les trois normales à la parabole se réduisent à une seule. Ce point qui est P_1 pouvait être reconnu à priori à cause de la propriété dont jouit l'axe de la parabole à partir de ce point.

La relation qui doit exister entre α et β pour qu'il n'y ait qu'une racine réelle dans l'équation (4), donne la position que doit occuper un point pour qu'on ne puisse mener de ce point qu'une normale à la courbe.

Pour déterminer cette relation, il faut faire disparaître le second terme de l'équation (4); à cet effet posons pour abréger

Digitized by Google

$$a = -2(\alpha - p), \quad b = (\alpha - p)^2, \quad c = -\frac{1}{2} p\beta^2,$$

l'équation devient

$$x'^3 + ax'^2 + bx' + c = 0.$$

Remplaçant x' par $u + x'$, et ordonnant par rapport à x', on a

$$\begin{array}{r|r|r} x'^3 + 3u & x'^2 + 3u^2 & x' + u^3 \quad = 0. \\ + a & + 2au & + au^2 \\ & + b & + bu \\ & & + c \end{array}$$

Pour que le second terme disparaisse il faut que la quantité u soit égale à $-\frac{1}{3} a$. Substituant dans les autres termes à u sa valeur, l'équation devient

$$x'^3 + x' \left[3 \frac{a^2}{9} - 2a \frac{a}{3} + b \right] - \frac{a^3}{27} + a \frac{a^2}{9} - \frac{1}{3} ab + c = 0$$

ou

$$x'^3 + x' \left[b - \frac{a^2}{3} \right] + \frac{2}{27} a^3 - \frac{1}{3} ab + c = 0.$$

Maintenant à la place de a, b, c mettons leurs valeurs,

$$x'^3 + x' \left[(\alpha - p)^2 - \frac{4}{3} (\alpha - p)^2 \right] - \frac{2}{27} 8(\alpha - p)^3 +$$
$$+ \frac{2}{3} (\alpha - p)^3 - \frac{1}{2} p\beta^2 = 0,$$

réduisant à leur plus simple expression les divers coefficients,

$$x'^3 - \frac{(\alpha - p)^3}{3} x' + \frac{2}{27} (\alpha - p)^3 - \frac{1}{2} p\beta^2 = 0. \qquad (5)$$

L'équation étant ramenée à la forme $x^3 + px + q = 0$, on sait qu'il faut pour qu'elle n'ait qu'une racine que $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. Mettant dans cette inégalité pour p et q leurs valeurs tirées de l'équation (5); on a pour la relation demandée l'inégalité

Digitized by Google

$$\frac{1}{4}\left[\frac{2}{27}(\alpha-p)^3-\frac{1}{2}p\beta^2\right]^2-\frac{1}{27}\frac{(\alpha-p)^6}{27}>0,$$

qui, simplifiée, devient

$$p\beta^2>\frac{8}{27}(\alpha-p)^3. \qquad (6)$$

L'inégalité (6) nous montre que tant que α est <0 ou $<p$, le second membre est négatif, et comme $p\beta^2$ est essentiellement positif, il s'ensuit que l'inégalité est satisfaite. Donc de tous les points situés à gauche de la ligne QP_1Q' parallèle à Ay, pour laquelle $AP_1=p$, il n'y a qu'une normale possible à la parabole. A droite de la même ligne il faut que $p\beta^2>\frac{8}{27}(\alpha-p)^3$. Fig. 32.

On a trouvé que l'équation $p\beta'^2=\frac{8}{27}(\alpha-p)^3$ est celle de la développée de la parabole; alors si on compare β à β', on voit que β^2 est plus grand que β'; donc il faut qu'un point à droite de QP_1Q' soit hors de la développée de la parabole pour qu'on ne puisse mener à la courbe qu'une seule normale.

L'équation du troisième degré, ramenée à la forme $x^3+px+q=0$, a deux racines égales, toutes les fois que $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, condition qui, appliquée à l'équation (5), donne

$$p\beta^2=\frac{8}{27}(\alpha-p)^3,$$

équation qui est celle qu'on a trouvée directement.

Pour que les racines de l'équation (5) soient réelles et inégales, il faut que

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0, \text{ condition qui donne } p\beta^2<\frac{8}{27}(\alpha-p),$$

c'est-à-dire qu'il faut que le point soit à l'intérieur de la développée.

Si dans l'équation (4) on fait $\alpha=p$, elle se réduit à

$$x'^3-\frac{1}{2}p\beta^2=0,$$

Digitized by Google

d'où on tire $x' = \left(\frac{1}{2}p\right)^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{2}{3}}$, et par suite $y'^2 = 2p\left(\frac{1}{2}p\right)^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{2}{3}}$.

Ces deux dernières équations donnant deux points, il semble au premier coup d'œil que du point $\alpha = p$, β on pourrait mener deux normales; mais cela tient à ce que les deux équations donnent les points où les deux normales, menées de deux points à égale distance du point P, sur la ligne QQ', dont $\alpha = p$ est l'équation, coupent la parabole, la ligne QQ' étant symétrique par rapport à l'axe des x;
Fig. 32. du reste il est facile de prouver directement, par les valeurs de x' et y', que du point Q il n'y a qu'une normale à la courbe; car soit le point tel que $AC = \left(\frac{1}{2}p\right)^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{2}{3}}$, $y' = CD = CD'$; or, si on admettait que du point Q il y a deux normales, ce seraient les lignes QD, QD'; mais on a démontré antérieurement que la ligne HD' est une normale, donc en un point d'une parabole il y aurait deux normales, ce qui ne peut être. Ainsi, la ligne $x = p$ est une ligne telle que de chacun de ses points on ne peut mener qu'une seule normale; résultat qui concorde avec la théorie qu'on vient d'exposer. On peut encore montrer directement que d'un point de la ligne QQ' il n'y a qu'une normale à la courbe.

Le point Q est déterminé par les équations $x = p$, $y = \beta$. L'équation d'une droite passant par ce point est $y - \beta = A(x - p)$; pour qu'elle soit normale à la parabole, il faut que $A = -\frac{y'}{p}$, en conséquence l'équation de la normale est $y - \beta = -\frac{y'}{p}(x - p)$; x', y' désignant les coordonnées du point où elle coupe la courbe; on a pour déterminer ce point les équations (1), (2).

$$(1) \qquad y' - \beta = -\frac{y'}{p}(x' - p),$$

$$(2) \qquad y'^2 = 2px'.$$

Éliminant x', il vient $py' - p\beta = -y'\left(\frac{y'^2}{2p} - p\right)$; chassant le dénominateur et effectuant les réductions, on a $y'^3 = 2p^2\beta$, d'où

$$y' = (2p^2)^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}},$$

Digitized by Google

et par suite $x' = \frac{1}{2p}(2p')^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}$. Ainsi l'équation de la normale est

$$y - \beta = -2^{\frac{1}{3}}p^{-\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}(x - p).$$

Donc du point $x = p, y = \beta$, on ne peut mener qu'une courbe normale, la valeur de y' qui est identique ainsi que celle de x', à celles obtenues par la méthode générale, montre que le point où elle coupe la parabole est toujours du même côté de l'axe de cette courbe que celui d'où elle part sur la droite QQ'.

De toute cette discussion il résulte : 1° que d'un point hors de la développée on ne peut mener qu'une normale à la parabole ; 2° que d'un point pris sur cette courbe on peut en mener deux ; 3° que d'un point pris à l'intérieur de la développée on peut en mener trois.

On voit par là que la développée de la parabole divise le plan en deux parties remarquables relativement à cette courbe.

Normale en un point situé sur la courbe.

21.—L'équation de la tangente au point x', y' étant $yy' = mxx' + p(x + x')$, celle de la normale au même point sera

$$y - y' = -\frac{y'}{mx' + p}(x - x'). \qquad (1)$$

Le point où cette ligne coupe l'axe des x a pour abscisse

$$x = p + x'(1 + m.)$$

Dans l'ellipse m est négatif et plus petit que l'unité, en conséquence $x'(1 + m)$ est > 0, puisque x' est toujours positif, la courbe étant supposée située tout entière du côté des x positifs. On voit que plus x' croît, plus la normale coupe le grand axe loin du sommet A, alors la valeur maximum de AP correspond à la valeur maximum de x', c'est-à-dire à $x' = -\frac{2p}{m}$, dans ce cas on a

$$x = -\frac{2p}{m} + p = -\frac{2p}{m} - p, \quad \text{or,} \quad \frac{-2p}{m} = 2a,$$

Digitized by Google

donc $x = 2a - p$, a désigne ici le demi-grand axe. La valeur $x = 2a - p$ détermine le point K; la valeur minimum de x correspond à $x' = 0$, alors $x = p$, égalité qui donne le point K'. On voit donc que dans l'ellipse les normales coupent toutes le grand axe entre les deux points K et K'. Puisque $AK = p = \frac{b^2}{a}$, $K'B = AK = \frac{b^2}{a}$, car $K'B = AB - AK'$; or, on a trouvé $AK' = 2a - p$, donc $K'B = 2a - (2a - p) = p$. Ainsi les deux points K, K' sont à égale distance du centre.

Fig. 33.

Pour les déterminer graphiquement, appelons O le centre de la courbe, on a

$$OK = OA - AK = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a};$$

telle est l'expression à construire.

Pour cela au foyer menons au grand axe une circonférence tangente dont le rayon soit plus grand que FA; du centre O décrivons une circonférence avec le demi-grand axe OA pour rayon, cette dernière coupe la première en deux points S, S'; joignons l'un d'eux S au centre O, la ligne OS coupe FS en S_1, point qui, rabattu sur la ligne AB par un arc de cercle décrit du point O comme centre avec OS_1 pour rayon, donne les points cherchés K, K', car on a $\overline{OF}^2 = OS \times OS_1$, or $\overline{OF}^2 = a^2 - b^2$, $OS = a$, donc $OS_1 = OK = OK' = \frac{a^2 - b^2}{a}$.

Considérons l'hyperbole; $m > 0$, alors $1 + m$ est toujours > 0. Donc le maximum de x correspond à $x' = \infty$, alors $x = \infty$. La valeur minimum de x pour la branche située du côté des x négatifs correspond à $x' = 0$; ce qui donne $x = p$, c'est-à-dire le point K. Pour la branche positive, le minimum de x est donné par $x' = -\frac{2p}{m}$; alors $x = -\frac{2p}{m}(1 + m) + p = -\frac{2p}{m} - p = 2a + \frac{b^2}{a}$, ce qui donne le point K'. Les points K, K' sont à égale distance des sommets, car $AK = -\frac{b^2}{a}$, $BK' = 2a + \frac{b^2}{a} - 2a = \frac{b^2}{a}$, donc $AK = BK'$, et $OK = OK'$.

Fig. 34.

Les points K, K' se déterminent graphiquement de la manière suivante. On a

Digitized by Google

$$OK = AK + OA = a + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a}.$$

Au foyer décrivons une circonférence tangente à l'axe transverse, dont le rayon soit plus grand que FA ou au moins égal, puis du centre O avec OA demi-axe transverse décrivons une circonférence; elle coupe la première en deux points S et S', dont l'un S joint à O, détermine en coupant la première circonférence en S_1, un point qui, rabattu par un arc de cercle décrit avec OS_1 pour rayon de O comme centre, sur l'axe transverse, donne les points cherchés K, K'; car on a $\overline{OF}^2 = OS \times OS_1$ ou $a^2 + b^2 = a + OS_1$, d'où $OS_1 = OK = OK' = \frac{a^2 + b^2}{a}$.

Supposons que la courbe soit une parabole, $m = 0$, il vient $x = x' + p$, ce qui prouve que toutes les normales coupent l'axe de la parabole au delà du point, $y = 0$, $x = p$, ou P_1; il n'y a que la normale au sommet, pour laquelle $x' = 0$, qui passe au point P_1. Propriété de la normale à la parabole que nous avons déjà reconnue. Fig. 32.

Par l'expression $x - x' = p$, on voit que la sous-normale est constante, et égale au demi-paramètre de la parabole.

Considérons enfin le cas de $m = -1$, qui est celui d'une circonférence, l'équation de la normale devient alors

$$y - y' = \frac{-y'}{p - x'}(x - x').$$

Si on cherche le point où elle coupe l'axe, on trouve $x = p$. Donc dans la circonférence toutes les normales passent au point $y = 0$, $y = p$, qui est le centre de la courbe : du reste la circonférence est la seule courbe du second degré jouissant de cette propriété.

Car la normale à une courbe du second degré ayant pour équation

$$y - y' = -\frac{y'}{mx' + p}(x - x').$$

On a trouvé que le point où elle coupe l'axe des x a pour abscisse $x = x'(1 + m) + p$; or, on voit que pour que cette abscisse soit constante, il faut que $m = -1$, c'est-à-dire que la courbe soit une circonférence.

Digitized by Google

Donc, dans les courbes du second degré, la circonférence est la seule où toutes les normales passent au même point, point qui est le centre de la courbe. Du reste, par la détermination des points désignés par K et K', on a vu qu'il n'y avait que la circonférence à pouvoir jouir de cette propriété.

22.—La longueur de la normale comprise entre la courbe et l'axe des x, a pour expression $\sqrt{y'^2+(x-x')^2}$, x, désignant l'abscisse du point où elle coupe l'axe des x; ainsi on a $N^2=y'^2+(x-x')$, remplaçant $(x-x)$ par sa valeur $mx+p$, il vient $\overline{N}^2=y'^2+(mx'+p)^2=y'^2+m^2x'^2+2pmx'+p^2$.

Le point x', y' étant sur la courbe, on a $y'^2=mx'^2+2px'$, en conséquence mettant pour y'^2 sa valeur, on a

$$N^2=mx'^2(1+m)+2px'(1+m))+p^2.$$

De là on déduit que pour que N soit constant, quel que soit le point (x', y') il faut que $m=-1$, c'est-à-dire que la courbe doit être une circonférence, et alors $N=p$ ou égal au rayon.

Donc la circonférence est la seule courbe du second degré où les normales soient constantes.

23.—On va démontrer que la circonférence est la seule courbe algébrique jouissant de la propriété que toutes ses normales soient égales.

Soit M le point pris sur la courbe, on a

$$\overline{MB}^2=\overline{MP}^2+\overline{PB}^2=y'^2+BP^2, \text{ or } BP=MP \text{ tang } BMP=y'\frac{dy}{dx}.$$

Fig. 32. Ainsi $N^2=y'^2+y'^2\frac{dy^2}{dx^2}=y'^2\left[1+\frac{dy^2}{dx^2}\right]$. Posons $N^2=p^2$, p étant une quantité constante, il vient $p^2=y'^2\left[1+\frac{dy^2}{dx^2},\right]$ équation qu'on peut mettre sous la forme $dx=\frac{ydy}{\sqrt{p^2-y^2}}$; intégrant, on a $x=-\sqrt{p^2-y^2}+c$, ou $y^2=p^2-(x-c)^2$. Ainsi l'équation de la courbe est $y^2+x^2-2cx=p^2-c^2$.

Donc la circonférence est la seule courbe algébrique où les normales soient égales.

Digitized by Google

APPLICATION.

Des normales aux courbes algébriques.

24.—Supposons l'équation de la courbe explicite $y = f(x)$; on a trouvé que la tangente au point (x', y') pris sur la courbe avait pour équation

$$y - y' = f'(x')(x - x') \quad \text{ou} \quad y - y' = \frac{dy}{dx}(x - x').$$

Celle de la normale au même point sera de la forme $y - y' = A(x - x')$, et comme elle doit être perpendiculaire sur la tangente, on a $1 + A\frac{dy}{dx} = 0$, d'où $A = -\frac{dx}{dy}$. Ainsi l'équation de la normale est

$$(1) \qquad y - y' = -\frac{dx}{dy}(x - x').$$

Si l'équation est implicite, il faut chercher la valeur de $\frac{dx}{dy}$, en conséquence différentions l'équation $f(x, y) = 0$, on a

$$dx.\frac{df(x,y)}{dx} + dy.\frac{df(x,y)}{dy} = 0;$$

tirant de là $\frac{dx}{dy}$, il vient

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{df(x,y)}{dy}}{\frac{df(x,y)}{dx}};$$

substituant cette valeur dans l'équation (1), on a, en réduisant tous les termes au même dénominateur et le supprimant,

$$(2) \qquad (y - y')\frac{df(x,y)}{dx} - (x - x')\frac{df(x,y)}{dy} = 0.$$

Telles sont dans les deux cas $y = f(x)$ et $f(x, y) = 0$, les équations de la normale au point x', y' de la courbe.

Digitized by Google

Exemple.

25.—Considérons l'équation générale $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$; cherchons celle de la tangente au point (x', y') de cette courbe.

L'équation générale d'une tangente est

$$(x - x')\frac{df}{dx} + (y - y')\frac{df}{dy} = 0.$$

Or, de l'équation donnée, on tire

$$\frac{df}{dx} = By' + 2Cx' + E, \quad \frac{df}{dy} = 2Ay' + Bx' + D.$$

Donc l'équation de la tangente sera

$$(1) \quad (x - x')(By' + 2Cx' + E) + (y - y')(Bx' + 2Ay' + D) = 0;$$

effectuant les calculs indiqués, on a

$$x[By' + 2Cx' + E] + y[Bx' + 2Ay' + D] = 2Bx'y' + \\ + 2Ay'^2 + 2Cx'^2 + Ex' + Dy'.$$

Le point x', y' étant sur la courbe, on a $Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F = 0$; de là, on tire $2Ax'^2 + 2Bx'y' + 2Cy'^2 + Dy' + Ex' = -Dy' - Ex' - F$; alors l'équation de la tangente est $x[By' + 2Cx' + E] + y[Bx' + 2Ay' + D] + Dy' + Ex' + F = 0$.

On voit que les coefficients de x et de y sont les dérivées du premier membre de l'équation prises successivement par rapport à x et à y dans lesquelles x et y sont remplacés par x' et y', puis le terme indépendant de x et de y est le premier membre de l'équation de la courbe duquel on a retranché les termes du second degré, et mis pour x et y les coordonnées x' et y'. Cherchons l'équation de la normale à la même courbe au point (x', y').

26.—L'équation générale de la normale est

$$(x - x')\frac{df}{dy} - (y - y')\frac{df}{dx} = 0.$$

Or, de l'équation de la courbe, on tire $\frac{df}{dx} = By' + 2Cx' + E$,

Digitized by Google

$\frac{df}{dy} = 2Ay' + Bx' + D$. En conséquence, on a pour l'équation de la normale

$$(x-x')\,[2Ay' + Bx' + D] - (y-y')\,[By' + 2Cx' + D] = 0.$$

Développant, il vient $x[2Ay' + Bx' + D] - y[By' + 2Cx' + D] - 2Ay'x' - Bx'^2 - Dx' + By'^2 + 2Cx'y' + Dy' = 0$ ou $x[2Ay' + Bx' + D] - y[By' + 2Cx' + D] - 2Ay'x' + 2Cx'y' - Bx'^2 + By'^2 - Dx'^2 + Dy' = 0$. Ainsi le point (x', y') étant déterminé par l'équation $Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F = 0$, l'équation de la normale en ce point est

$$x[2Ay' + Bx' + D] - y[2Cx' + By' + D] + 2x'y'(C - A) + \\ + B(y'^2 - x'^2) + D(y' - x') = 0.$$

De la sous-normale.

27.—On appelle sous-normale la projection sur l'axe des x parallèlement à l'axe des y de la partie de la normale comprise entre le point où elle coupe l'axe des x et celui où elle rencontre la courbe.

La sous-normale a pour expression $AB - BP = x - x'$, x étant l'abscisse du point où la normale coupe l'axe des x; on a trouvé que $y - y' = \frac{-y'}{mx' + p}(x - x')$ était l'équation de la normale en x', y'; donc en y faisant $y = 0$, on tire $x - x' = mx' + p$; de là on déduit qu'il faut pour que la sous-normale soit constante que $m = 0$, et alors elle est égale à p. Donc la parabole est la seule courbe du second degré où la sous-normale soit constante, sa valeur est le demi-paramètre de la courbe. Fg. 32.

On va montrer que la parabole est encore la seule courbe algébrique jouissant de cette propriété.

On a PB = MP tang PMB, or PMB = MTB; donc PB = MP tang MTB. Posons PB $= p$, MP $= y$, alors tang MTB $= \frac{dy}{dx}$, l'équation devient $p = y\frac{dy}{dx}$ ou $ydy = pdx$; intégrant, on a $y^2 = 2px + C$, ce qui n'est autre chose que l'équation d'une parabole du second degré. Ainsi la parabole est la seule courbe algébrique où la sous-normale soit constante. Fig. 32.

Digitized by Google

Des foyers.

28.—On appelle foyer dans une courbe du second degré un point tel, que sa distance à un point quelconque de la courbe s'exprime en fonction rationnelle de l'abscisse de ce point.

Soient α, β les coordonnées d'un point qu'on cherche, sa distance au point (x, y) est $\Delta^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2$; il faut exprimer que le point (x, y) est sur la courbe, ce qui donne l'équation $y^2 = mx^2 + 2px$; tirant de là la valeur de y et la transportant dans Δ^2, il vient

$$\Delta^2 = x^2(1+m) - 2x(\alpha - p) - 2\beta\sqrt{y^2 + mx^2} + \beta^2 + \alpha^2.$$

Pour que Δ soit rationnel quel que soit x, il faut à fortiori que Δ^2 le soit; or cette condition ne sera remplie que pour $\beta = 0$. Ainsi le foyer est situé sur l'axe des x; il ne reste plus qu'à trouver α. β étant zéro, Δ^2 devient

$$\Delta^2 = x^2(1+m) - 2x(\alpha - p) + \alpha^2.$$

Pour qne Δ soit rationnel il faut que sa valeur soit un carré parfait, ce qui donne l'équation $(\alpha - p)^2 = \alpha^2(1+m)$, d'où on tire $\alpha = \dfrac{p}{1+\sqrt{1+m}}$.

Ainsi les coordonnées du foyer sont

$$\beta = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{p}{1 \pm \sqrt{1+m}},$$

ce qui montre qu'il y a deux points dans les courbes du second degré tels que leurs distances à un point quelconque de la courbe s'expriment en fonction rationnelle de l'abscisse de ce point.

Cherchons maintenant la valeur de Δ.

Prenons la première valeur $\alpha = \dfrac{p}{1+\sqrt{1+m}}$, on a

$$\Delta^2 + x^2(1+m) - 2x\left(\frac{p}{1+\sqrt{1+m}} - p\right) + \left(\frac{p}{1+\sqrt{1+m}}\right)^2;$$

simplifiant, puis tirant la valeur de Δ, il vient

Digitized by Google

$$\Delta = \pm \left[\frac{p}{1 \quad \sqrt{1+m}} + x\sqrt{1+m} \right].$$

Considérons le second foyer, puis appelons Δ' la distance à un point de la courbe. L'expression générale Δ^2 devient

$$\Delta'^2 = x^2(1+m) - 2x\left(\frac{p}{1-\sqrt{1+m}} - p\right) + \left(\frac{p}{1-\sqrt{1+m}}\right)^2,$$

ce qui donne pour Δ'

$$\Delta' = \pm \left[\frac{+p}{1-\sqrt{1+m}} - x\sqrt{1+m} \right].$$

Les quantités Δ, Δ' devant être toujours positives, il faut chercher quels signes on doit prendre dans chaque courbe.

Prenons le cas de l'ellipse, alors $m = -\frac{b^2}{a^2}$, $p = \frac{b^2}{a}$; les valeurs de Δ, Δ' deviennent

$$\Delta = \pm \left[\frac{\frac{b^2}{a}}{1+\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}} + x\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \right] =$$

$$= \pm \left[\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}} + x\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \right] =$$

$$= \pm \left[a - \sqrt{a^2-b^2} + x\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \right],$$

$$\Delta' = \pm \left[\frac{\frac{b^2}{a}}{1-\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}} - x\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \right] =$$

$$= \pm \left[\frac{b^2}{a-\sqrt{a^2-b^2}} - x\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}} \right] =$$

$$= \pm \left[a + \sqrt{a^2-b^2} - x\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \right].$$

Digitized by Google

On voit que x étant toujours plus petit que $2a$, les quantité entre parenthèse sont essentiellement positives; donc il faut prendre les signes supérieurs; ainsi, prenant un point de la courbe et le joignant aux deux foyers, on a deux lignes dont les longueurs sont

$$\Delta = \frac{p}{1+\sqrt{1+m}} + x\sqrt{1+m}, \quad \Delta' = \frac{p}{1-\sqrt{1+m}} - x\sqrt{1+m}.$$

Ces lignes on les nomme rayons vecteurs.

29.—D'après les valeurs de Δ, Δ', on voit que

$$\Delta + \Delta' = \frac{p}{1+\sqrt{1+m}} + \frac{p}{1-\sqrt{1+m}} = \frac{2p}{-m} = \frac{\frac{2b^2}{a}}{\frac{b^2}{a^2}} = 2a.$$

Donc, dans l'ellipse, la somme des rayons vecteurs partant du même point sur la courbe est constante et égale au grand axe.

Passons au cas de l'hyperbole $m = \frac{b^2}{a^2}$, $p = -\frac{b^2}{a}$; on a alors

$$\Delta = \pm\left[\frac{-\frac{b^2}{a}}{1+\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + x\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}}\right] =$$

$$= \pm\left[\frac{-b^2}{a+\sqrt{a^2+b^2}} + x\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}}\right] =$$

$$= \pm\left[a - \sqrt{a^2+b^2} + x\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}}\right],$$

$$\Delta' = \pm\left[\frac{-\frac{b^2}{a}}{1-\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - x\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}}\right] =$$

$$= \pm\left[\frac{-b^2}{a-\sqrt{a^2+b^2}} - x\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}}\right] =$$

$$= \pm\left[a + \sqrt{a^2+b^2} - x\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}}\right].$$

Digitized by Google

Des valeurs de Δ, Δ' on déduit que pour qu'elles soient toujours positives, il faut prendre Δ avec le signe $+$, et Δ' avec le signe $-$; pour $x > 0$, et pour $x < 0$, c'est-à-dire négatif, il faut prendre Δ avec le signe $-$ et Δ' avec le signe $+$. Ainsi en écrivant

$$\Delta = \pm\left[\frac{p}{1+\sqrt{1+m}} + x\sqrt{1+m}\right],$$

$$\Delta' = \mp\left[\frac{p}{1-\sqrt{1+m}} - x\sqrt{1+m}\right],$$

il faudra prendre les signes supérieurs pour x positif et les signes inférieurs pour x négatif.

30.—Cherchant la différence des deux rayons partant du même point, on trouve

$$\Delta - \Delta' = \frac{p}{1+\sqrt{1+m}} + \frac{p}{1-\sqrt{1+m}} = \frac{2p}{-m} = \frac{-2\frac{b^2}{a}}{-\frac{b^2}{a^2}} = 2a.$$

Donc, dans l'hyperbole, la différence des rayons vecteurs est constante et égale à l'axe transverse.

On a trouvé que les coordonnées du foyer étaient

$$\beta = 0, \quad \alpha = \frac{p}{1+\sqrt{1+m}}, \quad \alpha = \frac{p}{1-\sqrt{1+m}},$$ Fig. 33.

ou

$$\beta = 0, \quad \alpha = \frac{b^2}{a \pm \sqrt{a^2-b^2}} = a \mp \sqrt{a^2-b^2}$$

dans le cas de l'ellipse; ainsi on voit qu'ils sont à égale distance du centre, distance qui a pour expression $\sqrt{a^2-b^2}$ que l'on construit en décrivant du sommet B' un arc de cercle avec a pour rayon; les deux points F, F' où le grand axe est coupé, sont les deux foyers.

Dans l'hyperbole, la position des foyers est déterminée par $\beta = 0$ et $\alpha = a \pm \sqrt{a^2+b^2}$; ainsi ils sont encore à égale distance du centre, distance qui a pour expression $a + \sqrt{a^2+b^2}$. Pour les déter-

Digitized by Google

miner, au sommet A élevons une perpendiculaire sur Ax, puis
Fig. 34. prenons AC $= b$, alors OC $= \sqrt{a^2+b^2}$; donc si du point O, centre de l'hyperbole, on décrit des arcs de cercle avec OC pour rayon, on coupe Ax en deux points F, F' qui sont les deux foyers.

31.—Enfin considérons le cas de la parabole $m=0$, on a $\beta=0$, $\alpha=\frac{p}{1\mp 1}=\frac{p}{2}=\frac{p}{0}$; ainsi α a deux valeurs dont l'une est finie et l'autre infinie, ce qui indique que la parabole n'a qu'un foyer dont les coordonnées sont $\beta=0$, $\alpha=\frac{p}{2}$. Les deux valeurs que donne le calcul sont dues à ce que la parabole est la limite des ellipses qui ont un foyer commun, mais dont les grands axes vont en croissant jusqu'à l'infini; alors cette courbe pouvant être considérée comme une ellipse particulière, doit par conséquent avoir deux foyers comme la courbe dont elle dérive.

32.—On va démontrer que la parabole est la limite des ellipses qui ont toutes même foyer et le même sommet correspondant à ce foyer, mais dont les grands axes vont en croissant jusqu'à l'infini.

Fig. 33. L'équation $y^2=mx^2+2px$, dans le cas de l'ellipse, devient $y^2=-\frac{b^2}{a^2}x^2+2\frac{b^2}{a}x$. Le foyer le plus voisin du sommet A a pour abscisse $\alpha=a-\sqrt{a^2-b^2}$; posons $\frac{1}{2}p=a-\sqrt{a^2-b^2}$, de là on tire $b^2=p\left(a-\frac{p}{4}\right)$; remplaçant b^2 par sa valeur $p\left(a-\frac{p}{4}\right)$, il vient

$$y^2=-x^2\left[\frac{1}{a}-\frac{p^2}{4a^2}\right]+2px\left[1-\frac{p}{4a}\right].$$

On voit que plus a va en croissant, plus le coefficient de x^2 diminue ainsi que le facteur $\frac{p}{4a}$; pour $a=\infty$, il vient $y^2=2px$, ainsi la parabole est la limite des ellipses dont les grands axes vont en croissant jusqu'à l'infini, et ayant toutes un de leurs sommets, celui qui correspond au foyer invariable, au même point.

33.—La tangente à une courbe du second degré fait avec les deux rayons vecteurs qui viennent à son point de contact des angles égaux.

Désignons par V l'angle des deux droites $y=ax+b$ et $y=$

Digitized by Google

$a'x+b'$; on sait que tang $V=\frac{a-a'}{1+aa'}$, cherchons, dans le cas qui nous occupe, a, a'.

Soit (x', y') le point pris sur la courbe, la tangente en ce point a pour équation

$$yy'=mxx'+p(x+x'), \text{ alors } a=\frac{mx'+p}{y'}.$$

Les coordonnées du foyer étant $\alpha=\frac{p}{1\pm\sqrt{1+m}}$, $\beta=0$, posant $\sqrt{1+m}=K$ l'équation de la droite qui passera par (x', y') et le premier foyer sera $y-y'=\frac{-y'}{\frac{p}{1+K}-x'}(x-x')$, d'où on tire $a'=\frac{-y'(1+K)}{p-x'(1+K)}$; alors on aura

$$\text{tang } V=\frac{\frac{mx'+p}{y'}-\frac{-y'(1+K)}{p-x'(1+K)}}{1-\frac{y'(1+K)(mx'+p)}{y'[p-x'(1+K)]}}=$$

$$=\frac{(mx'+p)[p-x'(1+K)]+y'^2(1+K)}{y'[p-x'(1+K)]-y'(1+K)(mx'+p)}.$$

Pour obtenir l'angle de la tangente avec le deuxième rayon vecteur, il faudra dans la valeur de tangente V changer K en $-K$; effectuant les calculs on a

$$(1)\quad \text{tang } V=\frac{(1+K)(y'^2-mx'^2)+mpx'+p^2-px'(1+K)}{-(1+K)(1+m)y'x'-pKy'},$$

remarquant que x', y' étant sur la courbe on a $y'^2-mx'^2=2px'$, l'équation (1) devient

$$(2)\quad \text{tang } V=\frac{2px'(1+K)+mpx'-px'(1+K)+p^2}{-x'y'(1+m)(1+K)-pKy'}=$$

$$=\frac{px'(1+K)+mpx'+p^2}{-x'y'(1+K)(m+1)-pKy'}.$$

Digitized by Google

De ce qu'on a posé $K = \sqrt{1+m}$, il vient $K^2 - 1 = m$; substituant à la place de m sa valeur en fonction de K, l'équation (2) se change en

$$\text{tang } V = \frac{px'(1+K)+px'(K^2-1)+p^2}{-x'y'(1+K)K^2-pKy'} =$$

$$= \frac{px'K+px'K^2+p^2}{-x'y'(1+K)K^2-pKy'} = \frac{p(Kx'+K^2x'+p)}{-y'[K^2x'(1+K)+pK]}.$$

Enfin,

$$\text{tang } V = \frac{-p[Kx'(1+K)+p]}{Ky'[p+Kx'(1+K)]};$$

supprimant le facteur commun aux deux termes, on a

$$\text{(3)} \qquad \text{tang } V = -\frac{p}{Ky'}.$$

En désignant par V' l'angle de la tangente avec le deuxième rayon vecteur, on déduit de l'équation (3)

$$\text{tang } V' = +\frac{p}{Ky'}.$$

Fig. 33. Donc V, V' sont supplémentaires ; or l'angle FMT a pour supplément FMT', en conséquence FMT' = TMF'.

Donc la tangente fait avec les rayons vecteurs qui vont à son point de contact des angles égaux : c'est cette propriété qui fait donner aux points F, F' le nom de foyers, et non la propriété qui a servi à les déterminer.

34.—D'après la propriété qu'a la lumière de se réfléchir en faisant l'angle d'incidence égal a l'angle de réflexion, il s'ensuit que si l'on place au foyer d'une ellipse un corps lumineux, tous les rayons de lumière, tombant sur la courbe, iront passer au point F, qu'on nomme à cause de cela foyer. Concevons une surface de
Fig. 33. révolution engendrée par une ellipse tournant autour de son grand axe; d'après la propriété de l'ellipse, si on place un corps lumineux au point F de l'axe de cette surface, tous les rayons lumineux iront se couper en F', de sorte que le point F' sera un centre de chaleur ou de lumière comme le point F; un tel point porte le nom générique de foyer.

Digitized by Google

De même encore si une personne est en F et qu'elle parle, les ondes sonores se réfléchissant de la même manière que les rayons lumineux, il s'ensuit qu'elles se couperont toutes en F', et une seconde personne placée en ce point percevra mieux le son produit qu'en tout autre point de l'intérieur de l'ellipsoïde ; et il peut arriver, si le son produit est très-faible et la distance FF' assez considérable, qu'une personne placée entre F et F' n'entendra pas ce qu'une autre personne en F' entendra. Dans certains palais il y a des salles voûtées présentant cette particularité.

35.—Dans une courbe du second degré à centre, le rectangle compris sous les distances d'un des foyers aux sommets de la courbe est constant et égal au carré du demi-second axe. En effet, les points F, F' étant à égale distance du centre O de la courbe, on a AF = F'B, et par suite FB = F'A ; or le calcul a donné

$$AF = \frac{p}{1+\sqrt{1+m}},\quad AF' = FB = \frac{p}{1-\sqrt{1+m}},$$

donc $$AF \times FB = \frac{p}{1+\sqrt{1+m}} \times \frac{p}{1-\sqrt{1+m}} = -\frac{p^2}{m}$$

ou $$FA \times FB = F'A \times F'B = \frac{-p^2}{m}.$$

Ainsi le rectangle a une surface égale à $-\frac{p^2}{m}$; or, dans l'ellipse, Fig. 33.

$$m = -\frac{b^2}{a^2},\quad p = \frac{+b^2}{a},$$

et, dans l'hyperbole,

$$m = \frac{b^2}{a^2},\quad p = -\frac{b^2}{a};$$

donc, dans l'ellipse, $FA \times FB = b^2$, et, dans l'hyperbole, on trouve également $FA \times FB = +b^2$; mais il faut avoir soin de changer le signe d'un des facteurs FA, FB; cela tient à ce que l'hyperbole étant rapportée à son sommet, les valeurs de FA, FB, qui sont Fig. 34. données par les calculs, sont l'une positive et l'autre négative, et comme les côtés d'un rectangle sont essentiellement positifs, on doit en conséquence, avant de faire le produit FA × FB, changer le signe d'un des facteurs.

Digitized by Google

THÉORÈME.

36.—Dans les courbes du second degré à centre, le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur une tangente quelconque est constant et égal au carré du demi-petit axe si la courbe est une ellipse, et égal au carré du demi-second axe si la courbe est une hyperbole.

Soient F, F′ les deux foyers et NT une tangente à la courbe ;
Fig. 15. désignons par FQ, F′Q′ les deux perpendiculaires dont il s'agit. Il faut prouver que FQ × F′Q′ est constant.

L'équation générale des courbes du second degré étant $y^2 = mx^2 + 2px$, celle de la tangente en N sera

$$yy' = mxx' + p(x + x') \quad \text{ou} \quad y = \frac{mx' + p}{y'}x + \frac{px'}{y'}.$$

Les équations des foyers sont

$$y = 0, \; x = \frac{p}{1 \pm \sqrt{1 + m}} = \frac{p}{1 \pm K}.$$

En conséquence, d'après la formule connue, on a

$$FQ = \frac{\frac{p}{1+K} \times \frac{mx' + p}{y'} + \frac{px'}{y'}}{\sqrt{1 + \frac{(mx' + p)^2}{y'^2}}} = \frac{p}{1+K} \times$$

$$\times \frac{mx' + p + x'(1 + K)}{\sqrt{y'^2 + (mx' + p)^2}},$$

posant pour abréger $\sqrt{y'^2 + (mx' + p)^2} = R$, l'expression de FQ devient

$$FQ = \frac{p}{(1 + K)R}[mx' + p + x'(1 + K)].$$

Pour obtenir F′Q′ il suffit de changer dans la valeur de FQ, K en — K, alors on a

$$F'Q' = \frac{p}{R(1 - K)}[mx' + p + x'(1 - K).$$

Digitized by Google

Des valeurs de FQ et F'Q' on déduit

$$FQ \times F'Q' = \frac{p^2}{R^2(1-K^2)}[(mx'+p+x')^2 - K^2x'^2];$$

développant $(mx'+p+x')^2$ en considérant $mx'+p$ comme un seul terme, il vient

$$FQ \times F'Q' = \frac{p^2}{R^2(1-K^2)}[(mx'+p)^2 + x'^2 + 2x'(mx'+p) - \\ - K^2x'^2];$$

remplaçant K^2 par sa valeur $1+m$ et réduisant, on a

$$FQ \times F'Q' = -\frac{p^2}{mR^2}[(mx'+p)^2 + mx'^2 + 2px'] = - \\ - \frac{p^2}{mR^2}[(mx'+p)^2 + y'^2],$$

parce que le point $x'\ y'$ est sur la courbe. Maintenant si on remarque que $R^2 = (mx'+p)^2 + y'^2$, on a enfin

$$FQ \times F'Q' = -\frac{p^2}{m}.$$

Donc le produit des perpendiculaires est constant.

Supposons la courbe une ellipse, $m = -\frac{b^2}{a^2}$, $p = \frac{b^2}{a}$, on a FQ $\times$ F'Q' $= b^2$; donc dans l'ellipse le produit est le carré du demi-petit axe.

Dans l'hyperbole $m = \frac{b^2}{a^2}$, $p = -\frac{b^2}{a}$, alors FQ $\times$ F'Q' $= -b^2$, le second a pour expression dans cette courbe $b\sqrt{-1}$; donc le produit est le carré du demi-second axe.

Ainsi se trouve démontré ce théorème, que les perpendiculaires abaissées des deux foyers sur une tangente multipliées entre elles donnent un produit constant; produit qui est le carré du demi-axe perpendiculaire à celui passant par les foyers.

De cette propriété des courbes du second degré on en déduit une seconde.

Si par les deux foyers on mène deux lignes parallèles, le produit

Digitized by Google

des parties de ces lignes comprises entre les foyers et une tangente quelconque est constant.

En effet, soient deux parallèles FD, F'D', terminées en D et D' à la tangente NT. Désignons par θ les angles égaux QFD, Q'F'D'; des triangles rectangles QFD, Q'F'D' on tire

$$FD = \frac{FQ}{\cos\theta},\ F'D' = \frac{F'Q'}{\cos\theta};\ \text{alors } FD \times F'D' = \frac{FQ \times F'Q'}{\cos^2\theta};$$

mais on vient de prouver que $FQ \times F'Q' = -\frac{p^2}{m}$, en conséquence

$$FD \times F'D' = \frac{1}{\cos^2\theta} \times \frac{-p^2}{m}.$$

Donc le produit des parallèles est constant. Pour deux autres parallèles on a

$$FD_{,} \times F'D'_{,} = \frac{-p^2}{m\cos^2\theta_{,}};$$

alors en désignant par P, P', P'' divers produits, on a

$$P : P' : P'' : P''' :: \frac{1}{\cos^2\theta} : \frac{1}{\cos^2\theta_{,}} : \frac{1}{\cos^2\theta_{,,}}.$$

37.—On va maintenant démontrer que les courbes du second degré sont les seules courbes jouissant de cette propriété.

La question à résoudre est celle-ci : Trouver le lieu des points tels, que si de deux points fixes F, F' on abaisse des perpendiculaires sur ses tangentes, le produit des parties de ces lignes comprises entre les points fixes et la tangente soit constant.

Prenons pour axe des x la ligne FF', et pour celui des y une perpendiculaire au milieu de FF'. Soient x, y les coordonnées du point de contact N de la tangente, et α l'angle NTx qu'elle fait avec l'axe des x; désignons $OF = \frac{1}{2}FF'$ par c.

Des triangles rectangles FQT, F'Q'T on tire $FQ = FT \sin\alpha$, $F'Q' = F'T \sin\alpha$; exprimons FT, F'T en fonction de x, y et tang α, on a

$$FT = RT - RF' = y\cot\alpha - (c - x),\ \text{et } F'T = y\cot\alpha + c + x;$$

posons $\frac{dy}{dx} = p$, alors

Digitized by Google

$$\text{tang}\,\alpha = -p,\ \sin\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

En conséquence le produit FQ × F'Q' aura pour expression

$$FQ \times F'Q' = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(x-c-\frac{y}{p}\right) \times \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(a+c-\frac{y}{p}\right).$$

De là on déduit l'équation

$$(1) \qquad \frac{p^2}{1+p^2}\left(x-c-\frac{y}{p}\right)\left(x+c-\frac{y}{p}\right) = b^2,$$

b^2 étant la quantité constante à laquelle doit être égal le produit.

L'équation (1) revient à

$$b^2(1+p^2) = p^2\left(x-\frac{y}{p}\right)^2 - p^2c^2;$$

d'où on tire

$$p\left(x-\frac{y}{p}\right) = \pm\sqrt{b^2(1+p^2)+p^2c^2},$$

et par suite $y = px \mp \sqrt{b^2(1+p^2)+p^2c^2}$; posons pour abréger $b^2+c^2=a^2$, on a

$$(2) \qquad y = px \mp \sqrt{b^2+a^2p^2};$$

différentiant l'équation (2), il vient

$$\frac{dy}{dx} = pdx + xdp \mp \frac{a^2pdp}{\sqrt{b^2+a^2p^2}};$$

mais on a

$$dy = pdx, \quad \text{donc} \quad pdx = pdx + xdp \mp \frac{a^2pdp}{\sqrt{b^2+a^2p^2}};$$

réduisant

$$(3) \qquad dp\left(x \mp \frac{a^2p}{\sqrt{b^2+a^2p^2}}\right) = 0.$$

Digitized by Google

L'équation (3) est satisfaite par

$$dp = 0, \text{ et } x = \frac{a^2p}{\sqrt{a^2p^2 + b^2}}.$$

La première solution donne $p = c$, alors l'équation (2) devient

$$y = cx \mp \sqrt{b^2 + a^2c^2};$$

cette dernière donne deux droites parallèles et coupant l'axe des y à la même distance de l'origine.

La seconde solution portée dans l'équation (2) la transforme en

$$y = \pm \frac{a^2p^2}{\sqrt{b^2 + a^2p^2}} \mp \sqrt{a^2p^2 + b^2};$$

réduisant tous les termes du second membre au même dénominateur, on a

$$y = \frac{\mp b^2}{\sqrt{a^2p^2 + b^2}}.$$

Pour avoir l'équation du lieu demandé, il faut éliminer la tangente p entre les équations (4), (5),

$$(4) \qquad x = \frac{\mp a^2p}{\sqrt{a^2p^2 + b^2}}, \qquad (5) \qquad y = \frac{\mp b^2}{\sqrt{a^2p^2 + b^2}},$$

il vient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Telle est l'équation du lieu.

On voit que si la quantité constante b est réelle, b^2 est positif et la courbe est une ellipse dont a, b sont les demi-axes, et F, F' les foyers; car on a posé $c^2 = a^2 - b^2$, d'où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Si la quantité b est imaginaire, alors b^2 est négatif et l'équation est $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1$, qui est celle de l'hyperbole dont a, b sont les axes, et F, F' les deux foyers puisque $c^2 = a^2 + b^2$.

Donc la courbe du second degré est le lieu des points tels, que si de deux points fixes on abaisse des perpendiculaires sur ses tangentes, le produit de ces lignes est constant, et suivant que ce pro-

Digitized by Google

duit est positif ou négatif, la courbe est une ellipse ou une hyperbole ; dont les foyers sont les deux points fixes.

38.—On a démontré par le calcul que dans l'ellipse la somme des deux rayons vecteurs est constante et égale au grand axe. On va démontrer que tous les points qui ne sont pas sur cette courbe ne jouissent point de cette propriété.

En effet, soit le point M′ hors la courbe, joignons-le aux deux foyers, l'un des rayons vecteurs FM′ coupe la courbe en M, joignons ce point à F′. Du triangle F′MM′ on tire $F'M < MM' + F'M'$, ajoutons aux deux membres la même quantité FM, il vient $FM + F'M < MM' + MF + M'F'$ ou $< F'M' + FM'$; le point M étant sur la courbe, on a $FM + F'M = 2a$, donc $M'F + M'F' > 2a$. Donc la somme des rayons vecteurs aboutissant à un point hors la courbe est plus grande que $2a$.

Considérons le point M″ à l'intérieur de la courbe, joignons-le à F, F′, puis prolongeons M″F jusqu'à la courbe en M, qu'on joint au deuxième foyer F′. Du triangle F′M″M on tire $F'M'' < MM'' + MF'$, ajoutant aux deux membres M″F, il vient $FM'' + M''F' < F'M + MM'' + M''F$; remarquant que $MM'' + FM'' = MF$ et que $MF + MF' = 2a$, le point M étant sur la courbe, on a $2a > M''F' + M''F$. Ainsi pour un point à l'intérieur la somme des rayons vecteurs est moindre que $2a$. Fig. 33.

Donc l'ellipse est la seule courbe où la somme des deux rayons vecteurs est constante et égale au grand axe.

39.—Cette propriété de l'ellipse permet de la tracer d'une manière continue. Fig. 35.

En effet, aux deux points F, F′ choisis pour foyers, on fixe deux styles verticaux dans lesquels on passe des anneaux terminant les extrémités d'une corde dont la longueur est le grand axe de l'ellipse, puis avec un troisième style on tend parfaitement les deux parties de la corde ; dans cette position on fait faire au style une révolution complète autour des points F, F′, le style laisse sur le plan une empreinte qui est l'ellipse dont F, F′ sont les foyers.

40.—Cette même propriété permet de la construire par points ; on y parvient en prenant sur le grand axe un point quelconque K ; du foyer F′ avec BK pour rayon on décrit un arc de cercle s'étendant au-dessus et au-dessous de la ligne AB, du point F avec AK on décrit également un arc de cercle, ces deux arcs vont se couper en deux points M, M′ qui sont deux points de la courbe ; puisque la somme de leurs rayons vecteurs est $AB = 2a$, ces deux Fig. 35.

Digitized by Google

arcs se coupent quel que soit le point K, car la distance de leurs centres FF′ est moindre que la somme des rayons $2a$, et le grand rayon BK $<$ AK $+$ FF′; en effet, $AK = a - \sqrt{a^2 - b^2} + \alpha$, $BK = 2a - a + \sqrt{a^2 - b^2} - \alpha = a + \sqrt{a^2 - b^2} - \alpha$, alors BK $<$ AK $+$ FF′ devient

$$a + \sqrt{a^2 - b^2} - \alpha < 2\sqrt{a^2 - b^2} + a - \sqrt{a^2 - b^2} + \alpha,$$

inégalité qui se réduit à

$$a + \sqrt{a^2 - b^2} - \alpha < a + \alpha + \sqrt{a^2 - b^2},$$

et qui est toujours satisfaite quel que soit α, c'est-à-dire quelle que soit la position du point K entre A et B. La ligne FF′ d'après une démonstration antérieure est égale à $2OF = 2\sqrt{a^2 - b^2}$.

Avec les mêmes ouvertures de compas, en agissant par rapport aux points F, F′ comme on l'a fait par rapport à F′, F, on obtiendra deux nouveaux points de l'ellipse.

41.—Nous venons de voir plusieurs méthodes pour tracer une ellipse, on va en donner deux autres qui sont fondées sur cette propriété, qu'il n'y a que les points de l'ellipse tels qu'entre ses coordonnées et les axes de la courbe il y ait la relation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

Fig. 99. *Première construction.* Soient AA′, BB′ les deux axes de l'ellipse qu'on se propose de construire, ainsi $OA = a$, $OB = b$; d'un point quelconque F de BB′, décrivons un arc de cercle avec $a + b$ pour rayon qui coupe AA′ en deux points P, P′; à partir du point F prenons $FM = a = FM'$, sur FP et FP′ les points M, M′ seront des points de la courbe; en effet, tirons MQ parallèle à AA′, des deux triangles QFM, MCP, on tire

$$MC : FQ :: MP' : FM \text{ ou } y : \sqrt{a^2 - x^2} :: b : a, \text{ d'où } y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Donc les points M, M′ sont des points appartenant à l'ellipse, dont AA′, BB′ sont les axes. On voit que si FP est une règle sur laquelle le point M est tel que $FM = a$, FP étant égal à $a + b$, et qu'on la place de manière à ce que ses extrémités soient situées sur les côtés d'un des quatre angles droits formés autour du point O, les diverses

Digitized by Google

positions, qu'aura ainsi occupées le point M, seront des points de l'ellipse demandée.

Deuxième construction. D'un point quelconque F de BB', ligne sur laquelle se trouve le petit axe, décrivons un arc de cercle avec $a-b$ pour rayon, qui coupe l'axe AA' en deux point P, P', tirons FP, FP', et sur leurs prolongements à partir du point F, prenons $FM = FM' = a$. Les points M, M' ainsi déterminés appartiennent à l'ellipse, car des deux triangles rectangles semblables FMQ PMR, on tire FQ : PR :: FM : PM, ou Fig. 100.

$$\sqrt{a^2 - x^2} : y :: a : b, \text{ d'où } y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

donc les points M, M' appartiennent à l'ellipse cherchée. Il suit de là que si on fait mouvoir une règle telle que $FP = a - b$ et $FM = a$, de manière à ce que ses deux points F et P soient sur les côtés d'un des quatre angles formés autour du point O, les diverses positions du point M donneront autant de points de l'ellipse ayant AA', BB' pour axes.

43.—Les méthodes que nous venons d'exposer pour construire une ellipse, montrent que cette courbe n'est qu'un cas particulier d'un genre de courbes auxquelles on donne le nom de Lemniscates. On va définir ces courbes et démontrer leur propriété fondamentale, qui va nous servir à donner une méthode nouvelle pour construire la normale et la tangente à l'ellipse en un point de cette courbe.

Lemniscates.

Lorsqu'une droite AA', de longueur invariable, se meut de manière que ses extrémités A, A' s'appuient constamment sur deux lignes ABC et A'B'C' que l'on nomme Directrices, un point quelconque a de cette droite ou de son prolongement engendre une courbe abc que l'on désigne sous le nom de Lemniscate. Fig. 101.

Pour obtenir un point de cette courbe, d'un centre M pris à volonté sur l'une des directrices, ABC, avec AA' pour rayon, on décrit un arc qui coupe l'autre directrice en N; on tire MN et on prend $MP = Aa$; le point P appartient à la lemniscate.

Soit O le point de concours des normales aux directrices en M et N; joignons les points M, P, N au point O; concevons le triangle NOM solidifié et mobile autour du point O, si on le fait tourner

Digitized by Google

autour de ce point de manière à ce que l'angle décrit par le côté OM soit infiniment petit, il prendra la position M'ON', les points M', N' appartiendront encore aux directrices, puisque les arcs décrits par ces points sont infiniment petits, et que leur rayons sont normaux aux directrices; il suit de là que la nouvelle position P' du point P est sur la lemniscate; donc l'élément de cette courbe PP' est perpendiculaire sur le rayon OP puisqu'il fait partie d'un arc de cercle, c'est-à-dire que la ligne OP est la normale à la lemniscate au point P. De là ce théorème général à l'aide duquel on pourra construire la normale et la tangente à une lemniscate quelconque. Les normales des deux directrices aux extrémités de la droite de longueur constante et celle de la lemniscate au point correspondant concourent toutes les trois au même point.

44.—D'après ce qu'on vient d'exposer, on voit que l'ellipse est une lemniscate, dont les deux directrices sont deux lignes perpendiculaires entre elles.

Fig. 99. Dans la première méthode pour construire la courbe, les deux directrices sont AA', BB', lignes sur lesquelles se trouvent les axes; la ligne de longueur constante FP est la demi-somme des axes, et le point générateur M est situé entre les deux extrémités de la ligne de longueur constante, ainsi $FP = a + b$, $FM = a$. Pour avoir la normale en M à l'ellipse, il faut élever en F et P des perpendiculaires aux directrices BB' et AA', ces lignes en se coupant en O' donnent la ligne O'M qui est la ligne demandée.

Fig. 100. Dans le second procédé, la ligne de longueur constante est $FP = a - b$, et le point générateur est M, tel que $FM = a$; on voit que les deux procédés ne diffèrent qu'en ce que dans le premier la ligne constante est la demi-somme des axes, et que dans le second elle est la demi-différence, puis ensuite que le point générateur est entre les deux directrices, tandis que dans le second il est en dehors. Pour avoir la normale dans la seconde construction il faut agir comme dans la première, en sorte que O'M est la normale au point M dans l'ellipse.

Fig. 102. 45.—Supposons qu'on donne la courbe tracée et qu'on demande la normale en un point donné sur cette courbe. Pour résoudre la question, tirons les axes de l'ellipse, soient AA', BB'. Du point donné M, décrivons un arc de cercle avec $OA = a$ pour rayon, soient P, P' les points où il coupe le petit axe BB' et son prolongement, tirons les lignes PMQ, P'Q'M, on détermine ainsi les deux lignes de longueur constante PQ, P'Q' dont on a parlé précédem-

Digitized by Google

ment, en sorte qu'en élevant les perpendiculaires PO, QO à BB' et à AA', on a à leur intersection en O un second point de la normale; ainsi OM est la ligne demandée; de même en menant les perpendiculaires P'O', Q'O' on a en O un troisième point de la normale, ainsi les trois points O, M, O' sont en ligne droite. De là naît le théorème suivant : Dans une ellipse, si par un de ses points on tire deux sécantes, telles que leur partie comprise entre le petit axe ou son prolongement et le point en question soit égale au demi-grand axe, les perpendiculaires aux axes aux points où chacune d'elles coupe les axes ou leur prolongement, déterminent en se coupant deux points, qui, joints l'un à l'autre, donnent une ligne normale à l'ellipse au point donné.

Jusqu'ici il n'a point été question de la tangente, mais il est évident que le procédé indiqué donnant la normale en un point pris sur l'ellipse, donne en même temps la tangente en ce point.

46.—Dans l'ellipse les deux rayons vecteurs qui aboutissent au point de contact d'une tangente faisant avec elle des angles égaux, il s'ensuit que la normale en ce point divise l'angle des deux rayons vecteurs en deux parties égales, ainsi les angles NMF, NMF' sont égaux; donc la normale divise l'intervalle qui sépare les deux foyers en parties proportionnelles aux rayons vecteurs adjacents, en sorte qu'on a, quel que soit le point M pris sur la courbe, NF : NF' :: FM : MF'. Fig. 33.

47.—Dans l'hyperbole la tangente MT divise l'angle des rayons vecteurs en deux parties égales, par conséquent la ligne FF', distance des foyers, est divisée en parties proportionnelles à MF, MF', en sorte qu'on a FN : F'N :: MF : MF'. Donc dans l'hyperbole la tangente divise la distance des foyers en parties proportionnelles aux rayons vecteurs adjacents allant aboutir au point de contact de la tangente. Fig. 34.

48.—Nous allons démontrer qu'il n'y a dans le plan que les points de l'hyperbole pour lesquels la différence des rayons est égale au premier axe.

Soit M un point hors de la courbe, tirons FM, F'M, la ligne FM coupe la courbe en M' pour lequel on a $F'M' - FM' = 2a$. Du triangle F'M'M on tire $F'M < F'M' + MM'$ ou $F'M - MM' < F'M'$, retranchant des deux membres FM', on a $F'M - MM' - FM' < F'M' - FM'$ ou $F'M - FM < 2a$; donc pour tout point hors la courbe la différence des rayons vecteurs est moindre que $2a$.

Prenons un point dans l'intérieur, dans la courbe, soit M''. Ti- Fig. 36.

Digitized by Google

rons FM″, F′M″, et prolongeons FM″ jusqu'à la courbe en M′ et enfin joignons M′ à F′. Du triangle F′M′M″ on déduit $F'M' < M'M'' + F'M''$ ou $F'M' - M'M'' < F'M''$. Si on retranche des deux membres FM″, l'inégalité ne change pas, conséquemment on a $F'M' - (M'M'' + FM'') < F'M'' - FM''$, ou $2a < F'M'' - FM''$. Donc si un point est à l'intérieur de la courbe, la différence de ses rayons vecteurs est plus grande que $2a$. Ainsi l'hyperbole est la seule courbe plane où la différence des rayons soit constante et égale à l'axe transverse.

49.—De cette propriété on va déduire une méthode pour construire la courbe par points. Soient F, F′ les deux foyers, AB l'axe transverse. Prenons sur Ax une longueur quelconque AK, du point F′ avec AK pour rayon, décrivons un arc de cercle qui s'étende au-dessus et au-dessous de AB; du point F avec BK pour rayon décrivons un second arc de cercle, qui, coupant le premier en deux points M′, M′,, donne deux points de l'hyperbole, puisque la différence de leurs rayons vecteurs est $2a = AB$. Les deux arcs de cercle se coupent, car le premier rayon est $AB + BK = 2a + BK$, le second est BK, donc leur somme est $2a + 2BK$; or la distance des centres est $2a + 2BF$, ainsi tant que BK est $> BF$, c'est-à-dire tant que le point K est pris au delà du foyer la distance des centres est moindre que la somme des deux rayons. Le grand rayon étant $2a + BK$ est moindre que $2a + BK + 2BF$, c'est-à-dire moindre que la somme du petit rayon et de la ligne des centres. Donc les arcs de cercle se coupent toujours en deux points. Pour $BK = BF$ ils seraient tangents et on aurait le point B; pour $BK < BF$ ils ne se couperaient pas. Donc tant que le point K est pris au delà du point F les deux arcs donnent deux points de l'hyperbole. Agissant avec les mêmes ouvertures de compas par rapport à F′, F comme on l'a fait pour F, F′, on déterminera deux nouveaux points; ainsi on peut dire qu'à chaque opération, comme pour l'ellipse, on détermine quatre points de la courbe.

Fig. 36.

50.—On peut, en se basant sur la propriété des rayons vecteurs, décrire une hyperbole d'un trait continu.

Pour cela au foyer F′ fixons une règle, puis en F plaçons l'origine d'un cordeau dont l'extrémité placée sur F′M′ soit telle que $F'M' - FM' = 2a$. Alors faisant tourner la règle autour du point F′, et en même temps au moyen d'un anneau glissant le long de la règle à partir du point M′ vers F′, appliquons le cordeau sur F′M′. Il est clair qu'à chaque déplacement du style, on retranche de FM′,

Digitized by Google

F'M' des longueurs égales, donc la différence des rayons vecteurs restant la même, c'est-à-dire $2a$, la suite des points qu'on obtient est une hyperbole. En agissant ainsi on ne peut avoir que la partie supérieure à AB de la première branche, mais en recommençant l'opération en dessous de AB on aura la seconde partie. La seconde branche s'obtient en agissant par rapport à F comme on l'a fait pour F'. Plus la règle dont on se sert est longue, plus l'hyperbole est étendue. Fig. 36.

Des propriétés des rayons vecteurs relativement aux tangentes on va déduire une méthode pour construire ces lignes dans chaque courbe.

CONSTRUCTION GRAPHIQUE DES TANGENTES.

Ellipse.

51.—Considérons le cas où le point donné est sur la courbe en D, joignons D à F et F', puis prolongeons DF' d'une longueur DP = DF, ou plutôt du point F' avec $2a$ pour rayon décrivons une circonférence, et du point D avec DF décrivons-en une seconde, ces deux lignes sont tangentes, car on a $DF + DF' = 2a$, donc $DF' = PF' - DF$. Joignons P à F, et du point D abaissons une perpendiculaire sur PF, la ligne TT' qu'on obtient est la tangente demandée. Car le triangle PDF étant isocèle et TT' étant perpendiculaire sur sa base, les angles T'DP, T'DF sont égaux, or T'DP = TDF', donc T'DF = TDF'. Ce qui prouve que TT' fait avec les rayons vecteurs des angles égaux. Par le calcul on a démontré que tous les points d'une tangente sont hors la courbe, on va de nouveau le prouver par des considérations géométriques. Fig. 37.

Soit Q un point sur la tangente, tirons les lignes QP, QF, QF'. Du triangle PQF' on déduit $PF' < OP + QF'$, mais $QP = QF$ puisque TT' est perpendiculaire sur le milieu de PF. Donc $QF' + QF > PF'$ ou $QF + QF' > 2a$. Donc tous les points de la tangente, hormis le point de contact, sont hors l'ellipse.

52.—Supposons le point donné hors la courbe en T. Le procédé est semblable à celui suivi dans le premier cas. Du foyer le plus distant du point donné, F', décrivons avec $2a$ pour rayon une circonférence, et du point T avec TF pour rayon décrivons-en une Fig. 38

Digitized by Google

seconde : ces deux lignes vont se couper quelle que soit la position du point T hors l'ellipse. Car on aura toujours le triangle TFF', dans lequel TF' est la ligne des centres, et d'où on tire $TF' < TF + FF'$ et à fortiori $TF' < 2a + TF$, mais $2a$, TF sont les deux rayons. Donc la ligne des centres est moindre que la somme des deux rayons. Du même triangle on tire $TF < FF' + TF'$, et alors $T < 2a + TF'$. Donc un des rayons TF est moindre que la somme faite de la ligne des centres et du second rayon. Enfin le point donné étant hors la courbe, on a $2a < TF + TF'$, c'est-à-dire que le second rayon est moindre que la somme de la ligne des centres et du premier rayon. Donc les circonférences se coupent toujours en deux points. Pour qu'elles ne se coupent qu'en un seul il faut que $TF' + TF = 2a$, c'est-à-dire que le point T soit sur la courbe ; elles ne se coupent point si $TF' + TF > 2a$, c'est-à-dire si le point donné est à l'intérieur de l'ellipse. Soient E, E' les points où les deux circonférences se coupent. Joignons E à F et F', puis du point donné T abaissons une perpendiculaire sur la ligne EF la plus voisine de T ; soit TT', cette ligne est la tangente demandée, et son point de contact est celui où TT' coupe EF'. Car joignons D à F, $DF = DE$, puisque T étant à égale distance de E et F, la ligne TT' est perpendiculaire sur le milieu de EF, en outre $EF' = DF + DF' = 2a$. Donc le point D est sur l'ellipse. Les angles TDE, TDF étant égaux, $T'DF' = TDF$, donc TT' fait avec les rayons vecteurs d'un point pris sur la courbe des angles égaux, donc elle est tangente. Joignant E' aux deux foyers, et abaissant sur la plus voisine des deux lignes obtenues une perpendiculaire du point T, on aura une seconde tangente. Ainsi on voit que d'un point hors l'ellipse il y a toujours deux tangentes à cette courbe, mais deux seulement.

Hyperbole.

Fig. 39. 53.—Soit D un point pris sur la courbe, désignons par F, F' les deux foyers, et joignons-les au point D. Du point donné comme centre avec le plus petit rayon vecteur décrivons un arc de cercle coupant DF en E. Si on joint E à F et que du point D on abaisse une perpendiculaire sur EF' la ligne TD obtenue est la tangente cherchée. En effet, les angles T'DF', T'DF sont égaux, puisque le triangle EF'D étant isocèle, la ligne TD est perpendiculaire sur sa base. Donc TD fait les rayons vecteurs des angles égaux, donc elle est tangente au point donné D.

Digitized by Google

Considérons un de ses points T, joignons-le à E, F, F'. TT' étant perpendiculaire sur le milieu de EF', on a TE = TF'. Du triangle TFE on tire TF < EF + ET ou TF — ET < EF, mais le point D étant sur la courbe, EF = DF — DF' = $2a$, en outre TE = TF'. Donc TF — TF' < $2a$. Ainsi tous les points de la tangente, hormis le point de contact, sont hors de l'hyperbole.

54.—Supposons le point donné extérieur à la courbe, soit T. De ce point avec le plus petit rayon TF décrivons une circonférence, et de l'autre foyer F' avec $2a$ pour rayon décrivons-en une seconde; ces deux courbes se coupent en deux points E, E'. Considérons l'un d'eux E, et joignons-le aux foyers. Si du point T on abaisse TT' sur EF perpendiculairement, cette ligne est la tangente demandée. Son point de contact est à l'intersection de son prolongement avec le second rayon vecteur EF' en D. Car DF = ED et DF' — DE = DF' — DF = EF' = $2a$. Ainsi pour le point D la différence de ses rayons vecteurs est $2a$, donc il est sur l'hyperbole. Maintenant TT' est une tangente, puisque les angles TDF, T'DF' sont égaux, cette ligne étant perpendiculaire sur le milieu de EF. Fig. 40.

On a admis que les deux circonférences se coupaient, cette hypothèse nous reste à démontrer.

Le point donné T étant hors la courbe, on a TF' — TF < $2a$ ou TF' < $2a$ + TF, donc la ligne des centres est moindre que la somme des deux rayons. Le point T ayant été supposé plus près de F que de F', TF < TF' et à fortiori TF' < $2a$ + TF', donc le rayon TF est plus petit que la somme de la ligne des centres et de l'autre rayon. En outre, quel que soit le point T, on a toujours $2a$ < TF' + TF, c'est-à-dire le second rayon moindre que la somme de la ligne des centres et du premier rayon. Donc toutes les fois que le point est hors la courbe, les circonférences se coupent en deux points qui fournissent deux tangentes passant par le point donné. Si TF' — TF = $2a$, les circonférences sont tangentes extérieurement, et il n'y a qu'une tangente, c'est l'hypothèse où le point donné est sur la courbe. Enfin si TF' — TF > $2a$, la ligne des centres est plus grande que la somme des deux rayons, les circonférences alors ne se rencontrent pas, et il n'y a pas alors de tangente, dans ce cas le point est à l'intérieur de l'hyperbole.

Parabole.

55.—Prenons un point D sur la courbe, et tirons ses deux rayons

Digitized by Google

vecteurs, l'un d'eux est comme on le sait infini, puisque le second foyer est situé à une distance infinie sur la ligne Ax. Du point donné avec le plus petit rayon vecteur DF décrivons une circonférence, cette courbe coupe le second rayon vecteur prolongé en E. Joignons E à F et abaissons DT perpendiculairement sur EF, on a dans DT la tangente demandée ; car le triangle EDF étant isocèle et TD étant perpendiculaire sur sa base, les angles TDE, TDF sont égaux. Donc TD est la tangente à la parabole au point donné.

Fig 41.

Pour démontrer que tous les points de la tangente sont hors la courbe à l'exception du point de contact, à partir du point A sur Ax' prenons AH = AF, puis menons HH' parallèlement à Ay. La ligne ainsi obtenue est la directrice. Considérons le point P pris sur la tangente, et joignons-le à F et E. Puisque DE = DF le point E est sur la directrice HH'. Abaissons la perpendiculaire PK sur HH', on a PK < PE, or PE = PF, la ligne PD étant perpendiculaire au milieu de EF, l'inégalité devient PK < PF. Donc tous les points de la tangente, à l'exception du point de contact, sont hors de la parabole.

56.—Considérons maintenant un point T hors de la parabole, et menons de ce point une tangente à la courbe.

Du point T avec TF pour rayon décrivons une circonférence, cette courbe coupe la directrice HH' en deux points E, E' puisque T étant hors de la courbe, on a la perpendiculaire TK < TF. Joignons E aux deux foyers, l'un des rayons vecteurs EK' est parallèle à Ax, et abaissons sur EF la perpendiculaire TD, le point où elle coupe EK est le point de contact de la tangente qu'on va prouver être TD. En effet, si on joint D au foyer F, on a DF = DE, puisque la ligne TD est perpendiculaire sur le milieu de EF, les lignes TE, FT étant par construction égales. Donc le point appartient à la parabole. Maintenant les angles TDE, TDF que fait TD avec les rayons vecteurs aboutissant en D sont égaux, donc TD est la tangente demandée.

Fig. 42.

Le point E' fournirait une seconde tangente passant par le point T. Donc d'un point hors de la parabole on peut mener à cette courbe deux tangentes.

On voit facilement que l'existence des tangentes repose sur l'intersection de la circonférence TF avec la directrice, examinons ce qui peut arriver.

Si TK est < TF il y a deux tangentes, c'est le cas supposé ci-dessus. Si TK = TF, la circonférence est tangente à HH' et alors il

Digitized by Google

n'y a qu'une tangente, cette hypothèse est celle du point sur la courbe. Si TK > TF, la ligne HH' n'est pas coupée par la circonférence et il n'y a point de tangente, par cette hypothèse le point T est dans l'intérieur de la parabole. Ainsi donc par un point hors la courbe il passe deux tangentes, une seule s'il est sur la courbe, et aucune s'il est à l'intérieur.

57.—On reconnaît facilement que les procédés pour construire graphiquement les tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole sont les mêmes, la parabole au premier coup d'œil semble exiger des procédés différents; on va montrer qu'ils sont identiques aux précédents.

Dans les courbes à centre, du foyer le plus éloigné du point donné on décrit une circonférence avec $2a$ pour rayon, or dans la parabole $a=\infty$, donc cette courbe est une droite; il faut prouver de plus qu'elle est directrice, et il sera démontré que pour mener des tangentes à la parabole les procédés sont les mêmes que pour les autres courbes. En effet, supposons que ce soit le foyer F qui reste fixe, le foyer F' va s'éloigner de plus en plus du sommet A, la circonférence décrite de F' avec $2a$ pour rayon coupera toujours Ax au delà du sommet A à une distance égale à AF, cela tient à ce que les foyers sont à égale distance des sommets qui leur correspondent. Mais à mesure que l'axe a croît, la circonférence s'approche plus d'une ligne droite perpendiculaire à Ax, enfin pour $a=\infty$, le rayon $2a=\infty$ et la courbe devient une perpendiculaire à Ax coupant cette ligne à une distance de A égale à AF; or à cette limite l'ellipse est devenue une parabole, donc la directrice dans cette courbe est la circonférence décrite du foyer le plus éloigné avec $2a$ pour rayon. Ainsi les mêmes méthodes exposées pour les trois courbes, relativement à la construction des tangentes, sont semblables. Fig. 38.

58.—Si dans les courbes du second degré on abaisse des foyers, des perpendiculaires sur les tangentes, leurs pieds sont sur une circonférence dont le centre est celui de la courbe, et le rayon le demi-axe sur lequel sont les foyers.

59.—Considérons l'ellipse. On a prouvé que FP était perpendiculaire sur la tangente DT, en conséquence joignons son pied I au centre. Les points O et I étant les milieux de FF' et FP, on a $OI=\frac{1}{2}PF'=\frac{1}{2}(DF+DF')$, mais le point D étant sur la courbe, $DF+DF'=2a$, donc $OI=a$. Ainsi la distance du pied de la perpendiculaire au centre est constante et égale au demi-grand axe. Fig. 37.

Digitized by Google

60.—Dans l'hyperbole on a démontré que EF′ est perpendiculaire sur DT, et en outre que le pied I de la perpendiculaire est le milieu de EF′. En conséquence si on joint le centre O à I, le point
Fig. 39. O étant le milieu de FF′, on a $OI = \frac{1}{2} EF$, or $EF = \frac{DF - DF'}{2} = a$ puisque le point est sur l'hyperbole. Donc $OI = a$, c'est ce qu'il fallait prouver.

61.—Considérons enfin la parabole.

La ligne EF est perpendiculaire sur la tangente DT, en outre I
Fig. 41. est au milieu de EF, or le point A étant le milieu de HF, la ligne Ay doit passer au milieu de EF, c'est-à-dire en I. Donc dans la parabole les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes sont sur la tangente au sommet.

62.—Cette propriété des foyers qu'on vient de démontrer par la géométrie se démontre de la manière suivante pour les trois courbes simultanément.

Pour la démontrer, cherchons le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes. L'équation de la tangente au point (x', y') de la courbe étant $yy' = mxx' + p(x + x')$, celle de la perpendiculaire abaissée d'un des foyers sera $y - \beta = \frac{-y'}{mx' + p}(x - \alpha)$. Or les coordonnées des foyers sont $\alpha = \frac{p}{1 \pm \sqrt{1+m}}$, $\beta = 0$. Donc l'équation des perpendiculaires abaissées des foyers sera $y = \frac{-y'}{mx' + p}\left(x - \frac{p}{1 \pm \sqrt{1+m}}\right)$.

$$(1) \quad yy' = mx' + p(x + x'), \qquad (2) \quad y'^2 = mx'^2 + 2px',$$

$$(3) \qquad y = \frac{-y'}{mx' + p}\left(x - \frac{p}{1 \pm \sqrt{1+m}}\right).$$

En faisant exister simultanément les équations (1), (2), (3), on exprime que x, y sont les coordonnées du pied de la perpendiculaire et en outre que le point (x', y') est sur la courbe.

Éliminant x', y' entre les équations (1), (2), (3), l'équation résultante en x, y sera le lieu demandé.

Posons pour abréger

$$\frac{p}{1 + \sqrt{1+m}} = c,$$

Digitized by Google

et résolvons les équations (1), (2) par rapport à x', y', on a

$$x' = -\frac{p(y^2+x^2-cx)}{m(y^2+x^2-cx)+p(x-c)},$$
$$y' = -\frac{p^2y}{m(y^2+x^2-cx)+p(x-c)}.$$

Transportant ces valeurs dans l'équation (3), il vient

$$\frac{p^4y^2}{[m(y^2+x^2-cx)+p(x-c)]^2} = m\frac{p^2(y^2+x^2-cx)^2}{[m(y^2+x^2-cx)+p(x-c)]^2} - \\ -2p^2\frac{y^2+x^2-cx}{m(y^2+x^2-cx)+p(x-c)},$$

réduisant tous les termes au même dénominateur et le supprimant, l'équation devient

$$p^4y^2 = m(y^2+x^2-cx)^2p^2 - 2p^2(y^2+x^2-cx) \\ [m(y^2+x^2-cx)+p(x-c)].$$

Si on pose $M = y^2 - cx + x^2$, et qu'on effectue les calculs indiqués, puis qu'on divise les deux membres par p^2, il vient

$$p^2y^2 = M^2m - 2mM^2 - 2p(x-c)M,$$

équation qui se réduit à $p^2y^2 = -mM^2 - 2p(x-c)M$; remettant à la place de M sa valeur, on a

$$p^2y^2 + m(y^2+x^2-cx)^2 + 2p(x-c)(y^2+x^2-cx) = 0;$$

effectuant, dans le premier membre de cette équation, les calculs indiqués et ordonnant par rapport à la lettre c, il vient

$$c^2(mx^2+2px) + c\begin{pmatrix}-2mxy^2 - 4px^2 - 2mx^3 \\ -2py^2\end{pmatrix} + p^2y^2 + \\ + m(y^2+x^2)^2 + 2py^2x + 2px^3 = 0,$$

ou

$$c^2(mx^2+2px) - 2c[x(my^2+mx^2+2px) - py^2] + \\ + m(y^2+x^2)^2 + 2px(y^2+x^2) + p^2y^2 = 0.$$

Digitized by Google

Il faut maintenant exprimer p^2 en fonction de m, c; on a posé

$$c = \frac{p}{1+\sqrt{1+m}},$$

alors

$$p^2 = c^2(1+1+m+2\sqrt{1+m}) = mc^2 + 2c^2(1+\sqrt{1+m});$$

or, de la même égalité on tire

$$1+\sqrt{1+m} = \frac{p}{c};$$

donc

$$p^2 = c^2m + 2c^2\frac{p}{c} = mc^2 + 2pc;$$

remplaçant p^2 par sa valeur dans l'équation, on a

$$c^2(mx^2+2px) + c[x(my^2+mx^2+2px) - 2py^2] +$$
$$+ m(y^2+x^2)(y^2+x^2) + 2px(x^2+y^2) + mc^2y^2 + 2pcy^2 = 0;$$

simplifiant et ordonnant par rapport à c, il vient

$$c^2(my^2+mx^2+2px) - 2cx(my^2+mx^2+2px) +$$
$$+ (mx^2+my^2+2px)(y^2+x^2) = 0.$$

On voit que $y^2m + mx^2 + 2px$ est facteur commun à tous les termes, en conséquence l'équation peut se mettre sous la forme

$$(my^2+mx^2+2px)(y^2+x^2+c^2-2cx) = 0,$$

ou

$$(my^2+mx^2+2px)[y^2+(x^2-c)^2] = 0.$$

Dans cette équation le second facteur étant essentiellement positif puisqu'il est la somme de deux carrés, pour qu'elle soit satisfaite il faut poser le premier facteur égal à zéro, ce qui donne enfin pour l'équation du lieu cherché

$$y^2 + x^2 + \frac{2p}{m}x = 0.$$

Digitized by Google

On voit que ce lieu est une circonférence dont le centre a pour ordonnée $y = 0$, et pour abscisse $x = -\frac{p}{m}$, ce qui donne le centre de la courbe $y^2 + mx^2 + 2px = 0$. On voit en outre que le rayon de cette circonférence est $-\frac{p}{m} = a$, et que cette courbe passe à l'origine des coordonnées; ce qui devait être, puisque ce point est le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente au sommet, origine des axes de coordonnées.

Le lieu trouvé ne contenant point la lettre c, il s'ensuit qu'il est encore le lieu des perpendiculaires abaissées du second foyer sur les tangentes.

Donc si dans une courbe du second degré à centre on abaisse des foyers des perpendiculaires sur les tangentes, le lieu des pieds de ces perpendiculaires est une circonférence dont le centre est celui de la courbe, et dont le rayon est la moitié du grand axe de la courbe si elle est une ellipse, ou la moitié de l'axe transverse si c'est une hyperbole.

Supposons $m = 0$, c'est-à-dire la courbe être une parabole, le lieu se réduit à $2px = 0$, ou $x = 0$; ce qui donne l'axe des y. Donc dans la parabole le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes est l'axe des y.

Les propriétés qu'on vient d'exposer pour les courbes du second degré permettent de les construire. On va considérer chaque courbe séparément.

Ellipse.

63.—Soient AA', BB' les deux axes qu'il faut construire, déterminons les deux foyers F, F'. Sur le grand AA' comme diamètre une circonférence, cette courbe est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes. En conséquence, si par le foyer F on mène une suite de lignes droites coupant la circonférence en m, m', m'', m''', m^{IV}, et qu'en ces points on élève aux lignes Fig. 69.
Fm, Fm', Fm'', Fm'''....., les perpendiculaires mp, $m'p'$, $m''p''$....., ces dernières seront des tangentes à l'ellipse. Si les points m, m', m'', m''' étaient pris à des distances infiniment petites les uns des autres, les perpendiculaires mp, $m'p'$, $m''p''$..... en se coupant détermineraient tous les éléments de la courbe; mais comme les opérations graphiques ne permettent pas de prendre les points m, m', m''..... tellement situés, on est obligé de les prendre aussi rap-

Digitized by Google

prochés que possible, et on détermine l'ellipse par cette condition d'être tangente aux lignes mp, $m'p'$, $m''p''$, $m'''p'''$..... La courbe par ce procédé se trace aisément.

Hyperbole.

64.—Soit AA' l'axe transverse de l'hyperbole; sur cette ligne comme diamètre décrivons une circonférence, et prenons sur cette dernière courbe les points m, m', m'', m''', m^{IV},..... aussi rapprochés que possible. Joignons l'un des foyers F, à ces points, et aux
Fig. 70. lignes mF, m'F', m''F'', m'''F''' élevons des perpendiculaires en m, m', m'', m''',..... soient mp, $m'p'$, $m''p''$, $m'''p'''$....., ces lignes sont tangentes à l'hyperbole, alors en traçant une ligne qui soit tangente à mp, $m'p'$, $m''p''$,..... on détermine l'hyperbole. Pour ne pas mettre de confusion dans cette construction, on se sert du foyer F pour déterminer les parties au-dessus de l'axe AA', et du foyer F' pour obtenir les autres parties de la courbe. Cette disposition doit être également suivie pour l'ellipse.

Parabole.

65.—Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes étant la tangente au sommet de la parabole, il suffit de prendre sur cette ligne yAy' une suite de points m, m', m'', m'''..... aussi rapprochés qu'il est possible, et d'élever en ces points
Fig. 71. des perpendiculaires aux lignes qui joignent m, m', m'', m''' au foyer F de la courbe. Les lignes mp, $m'p'$, $m''p''$..... qu'on obtient ainsi sont des tangentes, alors il suffit de décrire une courbe qui soit tangente à toutes ces lignes, et on a ainsi la parabole demandée. Si les points m, m', m''..... pouvaient être pris infiniment voisins, les tangentes en se coupant détermineraient des éléments de la courbe, et on aurait immédiatement, dans la série de ces éléments, la parabole.

66.—Par des considérations géométriques on a été conduit à conclure qu'il n'y a que les points d'une ellipse pour lesquels la somme des rayons vecteurs est constante et égale au grand axe, puis ensuite qu'il n'y a que ceux de l'hyperbole pour lesquels la différence des rayons vecteurs soit constante et égale à l'axe transverse. On va maintenant démontrer ces mêmes propriétés des foyers par le calcul.

Digitized by Google

67.—Considérons d'abord l'ellipse.

Soient F, F' les deux points fixes donnés, il faut trouver le lieu des points tels que la somme de leurs distances à F, F' soit constante et égale à $2a$. Posons $FF' = 2c$, puis prenons pour axe des x la ligne FF' et pour axe des y une perpendiculaire au milieu de FF'. Soit P un point du lieu, alors $PF = a + z$ et $PF' = a - z$; soient x, y ses coordonnées; on voit que le point P doit se trouver sur une circonférence dont le centre est en F et dont le rayon est $a + z$, son équation est alors $y^2 + (x - c)^2 = (a + z)^2$; le même point P se trouve encore sur une circonférence dont le centre est en F' et dont le rayon est $a - z$; cette circonférence a pour équation $y^2 + (c + x)^2 = (a - z)^2$. Ainsi le point P se trouvant à la fois sur ces deux courbes est leur intersection; donc si on fait exister simultanément les équations (1), (2), Fig. 43.

$$(1) \qquad y^2 + (c - x)^2 = (a + z)^2,$$
$$(2) \qquad y^2 + (c + x)^2 = (a - z)^2,$$

x, y désigneront les coordonnées du point P; si entre ces deux équations on élimine z, on aura dans l'équation résultante en x, y la relation qui existe entre les coordonnées d'un point quelconque P, tel que $PF + PF' = 2a$; ce sera alors l'équation du lieu cherché.

Retranchant ces deux équations membres à membres, il vient

$$4cx = 4az \quad \text{ou} \quad z = \frac{cx}{a}.$$

Remplaçant z par sa valeur dans l'équation (1), on a

$$y^2 + c^2 + x^2 - 2cx = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx;$$

simplifiant et réduisant tous les termes au même dénominateur, il vient

$$a^2y^2 + x^2(a^2 - c^2) + a^2(c^2 - a^2) = 0.$$

Posant $a^2 - c^2 = b^2$, on a

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Digitized by Google

Ainsi on voit que le lieu cherché est une ellipse dont le grand axe $2a$ se trouve sur la ligne FF', et dont le centre est au milieu de FF', puis enfin dont F, F' sont les foyers, puisque leurs coordonnées sont $y = 0$ et $x = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$.

Donc le lieu des points tels que la somme de leurs distances à deux points fixes soit constante, est une ellipse.

68.—Considérons le deuxième cas relatif à l'hyperbole.

Fig. 34. Soient F, F' les deux points fixes donnés, prenons pour axe des x, FF', et pour axe des y, Ay perpendiculaire au milieu de FF'. Soit P un des points du lieu demandé, alors PF' — PF $= 2a$, ce qui donne PF $= z + a$, PF' $= z - a$. Donc le point P sera à l'intersection des circonférences dont (1), (2) sont les équations

$$(1) \qquad y^2 + (c - x)^2 = (z - a)^2$$
$$(2) \qquad y^2 + (c + x)^2 = (z + a)^2.$$

Faisant exister simultanément ces équations, x, y désigneront les coordonnées du point P; éliminant z, l'équation résultante sera celle du lieu demandé.

Retranchons ces équations membres à membres, on a

$$4cx = 4az, \text{ d'où } z = \frac{cx}{a};$$

remplaçant z par sa valeur dans l'équation (1), il vient

$$y^2 + c^2 + x^2 - 2cx = \frac{c^2x^2}{a^2} + a^2 - 2cx,$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$a^2y^2 + x^2(a^2 - c^2) + a^2(c^2 - a^2) = 0.$$

Remarquant que $a < c$, on peut poser $b^2 = c^2 - a^2$, alors l'équation du lieu devient

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

Ainsi on voit que le lieu de tous les points tels que la différence de leurs distances à deux points fixes soit constante, est une hyperbole dont les deux points fixes sont les foyers, et le premier axe la différence constante des rayons vecteurs.

Digitized by Google

Des directrices.

69.—On appelle directrice une ligne telle que les distances d'un point quelconque de la courbe à cette droite et à un point fixe sont dans un rapport constant.

La détermination de la directrice dans une courbe du second degré exige celle du point fixe, et celle du rapport constant.

L'équation de la courbe est $y^2 = mx^2 + 2px$, celle de la droite sera de la forme $x = Ay + B$. Soient α, β les coordonnées du point fixe, et K le rapport constant.

La distance d'un point de la courbe à la directrice est

$$\Delta^2 = \frac{(x - Ay - B)^2}{1 + A^2},$$

celle du même point au point fixe est

$$\Delta'^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = x^2 + y^2 - 2\beta y - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

Exprimons que le point (x, y) est sur la courbe en remplaçant y par sa valeur $y = \sqrt{mx^2 + 2px}$, il vient

$$\Delta'^2 = x^2(1 + m) + 2x(p - \alpha) - 2\beta\sqrt{mx^2 + 2px} + \alpha^2 + \beta^2.$$

Alors la condition pour que la ligne $x = Ay + B$ soit directrice, est

$$K^2 = \frac{x^2(1 + m) + 2x(p - \alpha) - 2\beta\sqrt{mx^2 + 2px} + \alpha^2 + \beta^2}{\frac{1}{1 + A^2}(x - Ay - B)^2}; \quad (1)$$

réduisant tous les termes au même dénominateur, l'équation (1) devient

$$K^2(x - Ay - B)^2 = (1 + A^2)[x^2(1 + m) + 2x(p - \alpha) - \\ - 2\beta\sqrt{mx^2 + 2px} + \alpha^2 + \beta^2],$$

ou

$$K^2(x - A\sqrt{mx^2 + 2px} - B)^2 = (1 + A^2)[x^2(1 + m) + \\ + 2x(p - \alpha) - 2\beta\sqrt{mx^2 + 2px} + \alpha^2 + \beta^2].$$

Digitized by Google

Le premier membre est un carré, donc il faut que le second le soit, ce qui exige que les deux facteurs dont il se compose soient des carrés ; or $1 + A^2$ ne peut être un carré, A étant une quantité réelle, que si $A = 0$. Ainsi l'équation de la ligne $x = Ay + B$ se réduit à $x = B$, c'est-à-dire que s'il y a une directrice elle est parallèle à l'axe des y. La valeur $A = 0$ ramène l'équation (1) à

$$K^2 (x - B)^2 = x^2 (1 + m) + 2x (p - \alpha) - \\ - 2\beta \sqrt{mx^2 + 2px} + \alpha^2 + \beta^2. \qquad (2)$$

Le second membre devant être rationnel quel que soit x, ne peut l'être qu'à la condition de $\beta = 0$. Ainsi le point fixe se trouve sur l'axe des x.

L'équation (2) devient

$$K^2 (x - B)^2 = x^2 (1 + m) + 2x (p - \alpha) + \alpha^2. \qquad (3)$$

L'expression $x^2 (1 + m) + 2x (p - \alpha) + \alpha^2$ devant être un carré, donne l'égalité $\alpha^2 (1 + m) = (p - \alpha)^2$, d'où on tire

$$\alpha = \frac{p}{1 \pm \sqrt{1 + m}}.$$

Donc les coordonnées du point fixe sont

$$\beta = 0, \quad \alpha = \frac{p}{1 \pm \sqrt{1 + m}}.$$

A ces deux dernières équations on reconnaît que les points fixes qu'on vient de trouver sont les deux foyers de la courbe.

Dans l'équation (3) mettant pour α sa valeur, il vient

$$K (x - B) = \frac{p}{1 \pm \sqrt{1 + m}} \pm x \sqrt{1 + m},$$

ou

$$x (K - \sqrt{1 + m}) - KB - \frac{p}{1 \pm \sqrt{1 + m}} = 0.$$

Digitized by Google

Cette équation doit exister quel que soit le point pris sur la courbe, c'est-à-dire quel que soit x; alors il faut égaler à zéro le coefficient de x et le terme qui est indépendant de la variable; alors on a

$$K - \sqrt{1+m} = 0, \quad -KB - \frac{p}{1 \pm \sqrt{1+m}} = 0,$$

d'où on tire

$$K = \sqrt{1+m}, \quad B = \frac{-p}{(1 \pm \sqrt{1+m})\sqrt{1+m}}.$$

La quantité K est essentiellement positive puisqu'elle représente le rapport entre deux longueurs. L'égalité

$$B = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+m}\,(1 \pm \sqrt{1+m})}$$

montre que dans les courbes du second degré il y a deux directrices dont les équations sont

$$x = \frac{-p}{+\sqrt{1+m}\,(1+\sqrt{1+m})}, \quad x = \frac{-p}{-\sqrt{1+m}\,(1-\sqrt{1+m})}.$$

Maintenant que le rapport constant K, les coordonnées α, β du point fixe, les coefficients A, B sont déterminés, tout ce qui concerne les directrices est connu; il ne nous reste plus qu'à examiner les propriétés dont elles jouissent dans chaque courbe.

Ellipse.

70.—Dans l'ellipse $m = -\frac{b^2}{a^2}$, $p = \frac{b^2}{a}$. Alors

$$K = \sqrt{1+m} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2},$$

ainsi le rapport constant est moindre que l'unité, ou la distance d'un point de l'ellipse à la directrice est plus grande que la distance du même point au foyer correspondant à la directrice considérée.

Digitized by Google

La quantité B a pour expression

$$B = \frac{-\frac{b^2}{a}}{\pm\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}(a\pm\sqrt{a^2-b^2})} = \frac{-ab^2}{\pm\sqrt{a^2-b^2}(a\pm\sqrt{a^2-b^2})}.$$

On voit que les deux valeurs de B sont de signe contraire, donc l'une des deux directrices est hors l'ellipse; on va montrer qu'elles sont à égale distance du centre, et il sera prouvé par là qu'elles sont toutes les deux en dehors de l'ellipse. Les deux valeurs de B peuvent se mettre sous la forme

$$B' = \frac{-ab^2(a-\sqrt{a^2-b^2})}{+\sqrt{a^2-b^2}\times b^2}, \quad B'' = \frac{+ab^2(a+\sqrt{a^2-b^2})}{+\sqrt{a^2-b^2}\times b^2}.$$

Prenant la différence entre ces quantités, abstraction faite de leur signe, on a

$$B'' - B' = \frac{2ab^2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2\sqrt{a^2-b^2}} = 2a.$$

Fig. 44. Supposons que QH, Q'H' soient les deux directrices. L'ellipse étant rapportée au sommet A, on déduit de $B'' - B' = 2a$, que $AH = A'H'$, et par suite que $AH + AO = A'H' + A'O$. Donc les deux directrices sont à égale distance du centre et hors de l'ellipse.

Pour fixer ces directrices sur le plan, il suffit d'en construire une, puisqu'elles sont à égale distance du centre. Ainsi on est conduit à construire l'expression

$$x = \frac{-ab^2}{a\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2}.$$

Soient A, A' les sommets de l'ellipse situés sur le grand axe, et B, B' ceux situés sur le petit axe. Soient F, F' les deux foyers qu'on sait déterminer, on a

$$OF = \sqrt{a^2-b^2}.$$

Sur AF' comme diamètre décrivons une circonférence et prolongeons l'axe OB jusqu'à sa rencontre en D, on a

Digitized by Google

$$\overline{OD}^2 = OF' \times OA' = a\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Maintenant joignons le point D à F', du triangle rectangle DOF', on tire

$$\overline{F'D}^2 = a^2 - b^2 + a\sqrt{a^2 - b^2},$$

ainsi la question est ramenée à construire l'expression $\frac{ab^2}{\overline{F'D}^2}$.

Pour cela construisons $\frac{ab}{F'D}$; si on rabat le point D en D' sur AA', de sorte que OD = OD', et qu'on joigne D' a B, puis ensuite qu'on mène A'M parallèle à D'B, on a dans OM la ligne cherchée; car du parallélisme des lignes AM, D'B on tire

$$OD' : OA :: OB : OM, \text{ d'où } OM = \frac{OA \times OB}{OD'} = \frac{ab}{F'D}.$$

En conséquence il ne nous reste plus que $\frac{b \times OM}{F'D}$, ce à quoi on parvient en rabattant le point M en M' sur AA', puis en tirant de ce dernier une parallèle M'X à D'B, la ligne OX qu'on détermine ainsi est celle demandée, car on a

$$OM' : OD' :: OX : OB, \text{ d'où } OX = \frac{OM' \times OB}{OD'} = \frac{OM \times b}{F'D}.$$

Prenant, à partir de A et A' sur Ax, les longueurs AH = A'H' = OX, et menant par les points H, H' des parallèles à Ay, on a dans les lignes ainsi déterminées les deux directrices de l'ellipse.

Hyperbole.

71.—Dans l'hyperbole les coefficients m, p ont pour valeur

$$m = \frac{b^2}{a^2}, p = \frac{-b^2}{a}, \text{ alors } K = \sqrt{1 + m} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + b^2},$$

ce qui prouve que la distance d'un point de la courbe à la directrice est moindre que celle du même point au foyer correspondant. Les deux valeurs de B sont

Digitized by Google

$$B' = \frac{ab^2(a - \sqrt{a^2+b^2})}{\sqrt{a^2+b^2} \times b^2}, \quad B'' = \frac{-ab^2(a + \sqrt{a^2+b^2})}{b^2\sqrt{a^2+b^2}};$$

on voit qu'elles sont de même signe ; on en conclut qu'elles sont situées entre les deux branches de l'hyperbole.

Fig. 45. On va montrer qu'elles sont à égale distance du centre. En effet, prenons la différence des quantités B', B'', il vient

$$B'' - B' = \frac{-2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

prenant $\frac{1}{2}(B'' - B')$ et le retranchant de a, on a

$$a - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a(a - \sqrt{a^2+b^2})}{\sqrt{a^2+b^2}} = B'.$$

Donc OA' — OH' = A'H' = HA, H'M', HM étant les deux directrices. Donc les deux directrices de l'hyperbole sont à égale distance du centre.

Déterminons les positions des directrices ; pour cela il suffit de construire l'une des quantités B', B''. Prenons l'équation

$$x = \frac{ab^2}{a\sqrt{a^2+b^2} + a^2 + b^2}.$$

Soient A, A' les sommets situés sur l'axe transverse et C, C' situés sur le second axe ; soient en outre O le centre et F, F' les deux foyers de l'hyperbole, $OF = \sqrt{a^2+b^2}$. Sur AF' comme diamètre décrivons une circonférence, puis prolongeons OC jusqu'à sa rencontre en E, il vient

$$\overline{OE}^2 = OA \times OF' = a\sqrt{a^2+b^2}.$$

Joignons E à F', le triangle rectangle F'OE donne

$$\overline{F'E}^2 = a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2+b^2} = \overline{OF'}^2 + \overline{OE}^2,$$

Digitized by Google

de sorte qu'on est maintenant ramené à construire $\frac{ab^2}{F'E^2}$. Pour cela construisons $\frac{ab}{F'E}$.

A partir du centre O sur l'axe transverse, prenons $OE' = F'E$, joignons C à E' et tirons de A une parallèle AQ à E'C, la ligne OQ, qu'on détermine ainsi, est la ligne demandée; car, à cause des parallèles AQ, E'C, on a

$$OA : OE' :: OQ : OC, \text{ d'où } OQ = \frac{OA \times OC}{OE'} = \frac{ab}{F'E}.$$

Pour construire $\frac{ab^2}{F'E^2}$, ramenons Q en Q' sur AA' au moyen d'un arc de cercle décrit de O comme centre avec OQ pour rayon, et menons Q'P parallèle à E'C; la ligne OP est la quantité $\frac{ab^2}{FE}$, car on a

$$OQ' : OE' :: OP : OC, \text{ d'où } OP = \frac{OQ' \times OC}{OE'} = \frac{ab^2}{F'E^2}.$$

Maintenant sur l'axe AA', à partir des sommets A, A', prenons les longueurs $AH = A'H' = OP$, puis tirons les lignes HM, H'M' parallèles à CC', on détermine ainsi les deux directrices de l'hyperbole.

En comparant les deux méthodes graphiques suivies pour l'ellipse et l'hyperbole, on reconnaît au premier coup d'œil qu'elles sont les mêmes.

Parabole.

72.—Dans cette dernière courbe $m = 0$, alors $K = 1$. Donc chaque point de la parabole est à égale distance du foyer et de la directrice. L'équation trouvée pour la directrice

$$x = \frac{-p}{1 \pm \sqrt{1+m}} \text{ devient } x = -\frac{p}{2},\ x = \frac{p}{0},$$

ce qui montre que la parabole n'a qu'une directrice.

Supposons que la courbe soit une circonférence. Les coordonnées

Digitized by Google

du point fixe $\beta = 0$, $\alpha = \frac{p}{1 \pm \sqrt{1+m}}$, deviennent dans cette courbe $\beta = 0$, $\alpha = p$, c'est-à-dire qu'ils se réduisent au centre de la circonférence. L'équation de la directrice

$$x = \frac{-p}{\sqrt{1+m}\,(1 \pm \sqrt{1+m}} \text{ devient } x = \frac{-p}{0} = \infty,$$

c'est-à-dire que la circonférence n'a point de directrices. Le rapport constant $K = \sqrt{1+m}$ se réduit à zéro, ce qui devait être, car toute quantité finie divisée par l'infini donne zéro pour quotient.

On peut se rendre compte de ce résultat par des considérations géométriques. Soit DD' une perpendiculaire à l'axe des x. Prenons un point M quelconque sur la circonférence, soit MN sa distance à

Fig. 46. DD'; le rapport $\frac{R}{MN}$ ne peut être constant, puisque MN varie d'un point à un autre, tandis que R, rayon de la circonférence, est constant. Ainsi on voit que la circonférence fait exception aux autres courbes du second degré, relativement aux directrices. Cette particularité montre qu'il ne faut pas appliquer toutes les propriétés de l'ellipse à la circonférence, quoique cette dernière ne soit qu'une ellipse dont les axes sont égaux.

73.—On vient de voir que dans les courbes du second degré il existe deux lignes telles que le rapport des distances d'un point de la courbe à l'une des droites et au foyer le plus voisin est constant; puis ensuite que les courbes sont les seules courbes algébriques jouissant de cette propriété. Ce rapport est > 1 dans l'ellipse, < 1 dans l'hyperbole, et enfin $= 1$ dans la parabole.

On va démontrer géométriquement qu'il n'y a que les points de la courbe à jouir de cette propriété relativement à la directrice; nous considérerons d'abord les courbes à centre, parce que la démonstration est identiquement la même pour l'ellipse et pour l'hyperbole.

74.—Soit PH la directrice et M un point hors la courbe, on va démontrer que $\frac{MK}{MF} = \frac{m}{n}$ ne peut exister qu'à moins que le point M soit sur la courbe.

Fig. 47. En effet, la ligne MF coupe la courbe en N; tirons la perpendiculaire NR à PH. La ligne PH étant directrice de la courbe, on a

Digitized by Google

$\frac{NR}{NF} = \frac{m}{n}$, donc en vertu de l'égalité précédente $\frac{NR}{NF} = \frac{MK}{MF}$; prolongeons MF jusqu'à la rencontre de la directrice en O, des triangles semblables MOK, NOR on tire $\frac{MK}{NR} = \frac{MO}{NO}$; or de l'égalité $\frac{NR}{NF} = \frac{MK}{MF}$ on déduit $\frac{MK}{NR} = \frac{MF}{NF}$, ce qui donne, en la comparant à la précédente, $\frac{MO}{NO} = \frac{MF}{NF}$, ou la proportion MO : NO :: MF : NF; or on sait qu'on peut en tirer la proportion MO — MF : MO :: NO — NF : NO; mais MO — MF = OF, et NO — NF = OF, ce qui donne OF : MO :: OF : NO; proportion qui ne peut exister que lorsque MO = NO, ou MF = NF. Donc il n'y a que les points de la courbe dont le rapport des distances d'un point de cette courbe à la droite et au foyer soit constant; si le point pris en considération était en G à l'intérieur de la courbe, il faudrait prolonger OGF jusqu'à la courbe en N, puis tirer la perpendiculaire NR à PH; la démonstration se ferait alors comme ci-dessus.

Il y a un cas où la démonstration ne peut pas s'appliquer, c'est celui où MF est parallèle à PH, ou perpendiculaire à Ax. Soit M' un point dans cette position, tirons NR perpendiculaire sur PH. Supposons qu'on ait $\frac{M'K}{M'F} = \frac{m}{n}$, le point N étant sur la courbe, on a $\frac{NR}{NF} = \frac{m}{n}$, alors de ces deux égalités on déduit $\frac{M'K}{M'F} = \frac{NK}{NF}$, or NR = M'K, puisque A$y$ et M'F sont parallèles; donc M'F = NF; donc pour que l'égalité $\frac{MF'}{MK} = \frac{n}{m}$ existe, il faut que M'F = NF, c'est-à-dire que le point M' soit sur la courbe. Fig. 48.

75. — Considérons le cas où la courbe est une parabole :

Soit PH la directrice et M un point hors la courbe, il faut prouver que MK n'est point égal à MF; en effet MF coupe la courbe en M. Tirons NR perpendiculaire sur PH, on a, le point N étant sur la courbe, NR = NF; joignons N à K, du triangle MKN on tire MK < NK + MN, or KN > NR et par suite que NF; donc, à fortiori, on aura MK < MN + NF, ou MK < NF. Ainsi tout point hors la courbe est plus près de la directrice que du foyer. Fig. 50.

Prenons le point I intérieur à la courbe, tirons IQ perpendiculaire sur PH, puis enfin joignons S à F; du triangle SFI on déduit

Digitized by Google

FI $<$ IS $+$ SF, or SF $=$ SQ, le point S étant sur la courbe ; donc FI $<$ IS $+$ SF ou $<$ QI. Donc quand le point est intérieur, sa distance à la droite est supérieure à sa distance au foyer ; ce qui prouve qu'il n'y a que les points de la parabole qui soient à égale distance de la directrice et du foyer. Cette propriété permet de décrire la courbe par un trait continu.

Fig. 49. 76.—En effet, contre la directrice appliquons une équerre MNP, puis déterminons sa position telle que PF $=$ NP ; si alors on attache un fil au foyer F et au point P, et qu'il soit bien tendu, on décrira la parabole en faisant glisser l'équerre le long de BH, puis en appliquant en même temps le fil FP sur PN en partant de P, le style qui opérera ce mouvement dans la position du fil, tenu constamment tendu, décrira la courbe ; on le démontre en remarquant que de PN et PF on retranche dans chaque position du style des longueurs égales ; comme au point de départ PN $=$ PF, les parties restantes sont toujours égales. Donc tous les points ainsi décrits sont à égale distance de la directrice et du foyer ; donc la courbe décrite est une parabole.

Fig. 51. 77.—On va démontrer par le calcul que la courbe, qui est telle que le rapport des distances d'un de ses points à une droite et à un point fixe soit constant, est une courbe du second degré ; on aura alors employé toutes les méthodes pour démontrer les théorèmes ci-dessus énoncés.

Soient HH′ la droite donnée et M le point fixe, abaissons du point M une perpendiculaire sur HH′, il est évident que la courbe devra être symétrique par rapport à cette droite ; car si un point B est tel qu'on ait $\frac{BD}{BM} = \frac{m}{n}$, le point B′, le symétrique de B par rapport à MQ, jouira de la même propriété ; donc en prenant MQ pour axe des x, l'équation du lieu ne contiendra qu'un terme en y qui sera du deuxième degré. Maintenant à partir du point Q divisons QM en deux parties telles qu'on ait $\frac{AQ}{AM} = \frac{m}{n}$, le point A sera un point de la courbe ; donc si on prend Ay parallèle à HH′ pour axe des y, l'équation de la courbe ne contiendra point de terme indépendant des coordonnées.

Le point A étant tel qu'on ait $\frac{AQ}{AM} = \frac{m}{n}$, posons $m =$ AQ, alors $n =$ AM ; il suit de là que l'unité linéaire est $\frac{AQ}{m}$.

Digitized by Google

Soit B un point du lieu, on aura

$$\frac{\overline{BD}^2}{\overline{BM}^2} = \frac{m^2}{n^2}, \text{ or } \overline{BD}^2 = (BE + ED)^2 = (x + m)^2,$$

$$\overline{BM}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{MF}^2 = y^2 + (x - n)^2;$$

ainsi l'équation du lieu est

$$\frac{(x + m)^2}{y^2 + (x - n)^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Réduisant tous les termes au même dénominateur et développant les carrés, il vient

$$n^2x^2 + m^2n^2 + 2mn^2x = m^2y^2 + m^2x^2 + m^2n^2 - 2m^2nx.$$

Si on simplifie et qu'on ordonne par rapport à y et à x, on a

$$m^2y^2 + x^2(m^2 - n^2) - 2xmn(m + n) = 0.$$

On voit que le lieu est une courbe du second degré dont Ax est l'un des axes et A l'un des sommets. Cette courbe sera une ellipse quand $m > n$ ou $\frac{m}{n} > 1$, une hyperbole quand $\frac{m}{n} < 1$, et enfin une parabole lorsque $m = n$ ou $\frac{m}{n} = 1$.

Si la courbe est une ellipse, son grand axe est $\frac{2mn}{m - n}$; cette expression est aussi celle de l'axe transverse de l'hyperbole.

78.—On va montrer que le point M est le foyer de la courbe, et la ligne HH′ la directrice correspondante. On a trouvé que les abscisses des foyers sont $\frac{p'}{1 \pm \sqrt{1 + m'}}$, l'équation de la courbe étant $y^2 = m'x^2 + 2p'x$; alors

$$m' = -\frac{m^2 - n^2}{m^2}, \quad p' = \frac{n(m + n)}{m};$$

donc les abscisses des foyers du lieu cherché seront

Digitized by Google

$$x = \frac{+\dfrac{n(m+n)}{m}}{1 \pm \sqrt{1 + \dfrac{-m^2+n^2}{m^2}}} = \frac{\dfrac{n(m+n)}{m}}{(m \pm n)\dfrac{1}{m}} = \frac{n(m+n)}{m \pm n}.$$

Ainsi on voit que l'un des foyers a pour abscisse $n = x$, et l'autre $x = \dfrac{n}{m-n}$, c'est-à-dire que le point donné est l'un des foyers, car AM $= n$.

Les équations des directrices sont

$$x = \frac{p'}{\pm\sqrt{1+m'}\,(1 \pm \sqrt{1+m'})} = \frac{p'}{1+m' \pm \sqrt{1+m'}};$$

mettant à la place de p', m' leurs valeurs, il vient

$$x = \frac{n\left(\dfrac{m+n}{m}\right)}{1 - \dfrac{m^2-n^2}{m^2} \pm \sqrt{1 - \dfrac{m^2-n}{m^2}}} = \frac{n(m+n)\dfrac{1}{m}}{\left(\dfrac{n^2}{m} \pm \sqrt{n^2}\right)\dfrac{1}{m}} =$$

$$= \frac{n(m+n)}{\dfrac{n^2}{m} \pm n} = \frac{mn\,(m+n)}{-n\,(m \pm n)}.$$

Les directrices ont pour équation

$$x = -m \text{ et } x = -\frac{m(m+n)}{m-n};$$

ce qui prouve que H'H est une des directrices.

Donc le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à une droite et à un point fixe soit constant, est une courbe du second degré, qui est une ellipse quand ce rapport est plus grand que l'unité, une hyperbole quand il est moindre que l'unité, et une parabole quand il est l'unité; puis en outre la droite fixe est une des directrices de la courbe, et le point donné est le foyer de la courbe correspondant à la directrice donnée par la ligne fixe.

Digitized by Google

PROBLÈME.

79.—Dans les courbes à centre du second degré on demande l'angle que font entre elles deux lignes partant d'un point de la courbe et allant aboutir à deux points du grand axe équidistant du centre, ou à deux points de l'axe transverse, si la courbe est une hyperbole.

Soient Ay, Ax les deux axes de coordonnées, soit M le point pris sur la courbe dont O est le centre, soient enfin E, E′ les deux points fixes, leurs coordonnées seront

$$x=\alpha,\quad x=-\frac{2p}{m}-\alpha,\quad y=0.$$ Fig. 52.

L'équation de la ligne ME est

$$y=\frac{y'}{x'-\alpha}(x'-\alpha),$$

celle de ME′,

$$y=\frac{y}{x'+\frac{2p}{m}+\alpha}\left(x+\frac{2p}{m}+\alpha\right).$$

Posons l'angle EME′ = V, on a alors d'après la formule connue,

$$\text{tang V}=\frac{-\frac{y}{x-\alpha}+\frac{y}{x+\frac{2p}{m}+\alpha}}{1+\frac{y^2}{x^2-\alpha^2+\frac{2p}{m}(x-\alpha)}}=$$

$$=2\left(\alpha+\frac{p}{m}\right)\frac{-y}{y^2+x^2+\frac{2px}{m}-\frac{2p\alpha}{m}-\alpha^2}. \qquad (1)$$

On n'a point exprimé jusqu'ici que le point M était sur la courbe, en sorte qu'il est un point quelconque du plan.

80.—Supposons qu'on demande le lieu des points tels que l'angle M soit constant.

Digitized by Google

Pour l'obtenir posons dans l'équation (1) tang V $= c$, il vient

$$-2\left(\alpha+\frac{p}{m}\right)y = c\left(y^2+x^2+\frac{2p}{m}x-\frac{2p}{m}\alpha-\alpha^2\right),$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$\left(y+\frac{\alpha+\frac{p}{m}}{c}\right)^2+\left(x+\frac{p}{m}\right)^2-\frac{p}{m}\left(2\alpha+\frac{p}{m}\right)-\alpha^2-\frac{1}{c}\left(\alpha+\frac{p}{m}\right)^2=0.$$

Fig. 53. On voit que ce lieu est une circonférence dont

$$y=\frac{-1}{c}\left(\alpha+\frac{p}{m}\right),\quad x=-\frac{p}{m}$$

sont les coordonnées du centre, et qui passe par les points E, E', car son équation est satisfaite par

$$y=0,\ x=\alpha,\ \text{et}\ y=0,\ x=-\frac{2p}{m}-\alpha.$$

Donc tous les angles inscrits dans un segment circulaire EME' sont égaux, et la circonférence est la seule courbe jouissant de cette propriété.

Fig. 54. Prenons l'hypothèse de tang V $= \infty$, c'est-à-dire de l'angle EME' droit, l'équation du lieu obtenu précédemment devient

$$y^2+\left(x+\frac{p}{m}\right)^2-\frac{p}{m}\left(2\alpha+\frac{p}{m}\right)=0,$$

ou

$$y^2+x^2+\frac{2px}{m}-\frac{2p\alpha}{m}-\alpha^2=0.$$

On voit qu'alors le centre de la circonférence est sur l'axe des x, et que E, E' sont les deux extrémités d'un diamètre ; si on suppose $\alpha = 0$, l'équation devient

$$y^2+x^2+2p\frac{x}{m}=0;$$

elle montre que le lieu passe à l'origine des axes de coordonnées.

Digitized by Google

Donc tous les angles inscrits dans une demi-circonférence sont droits.

Revenons maintenant à la recherche de la solution du problème énoncé.

Dans l'équation (1) exprimons que x, y appartiennent à un point de la courbe dont $y^2 = mx^2 + 2px$ est l'équation, il vient l'équation

$$(2)\quad \text{tang V} = -2\left(\alpha + \frac{p}{m}\right)\frac{\sqrt{mx^2 + 2px}}{x^2(m+1) + 2px\left(\frac{1}{m}+1\right) - \frac{2p\alpha}{m} - \alpha^2}.$$

Pour discuter cette valeur on va considérer successivement les deux courbes à centre.

81.—Prenons l'ellipse, $m = -\frac{b^2}{a^2}$, $p = \frac{b^2}{a}$; substituant ces valeurs dans l'équation (2), on a, en remarquant que $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(-x^2 + 2ax)$,

$$\text{tang V} = 2(\alpha - a)\frac{-y}{-\frac{(a^2 b^2)}{b^2}y^2 + 2a\alpha - \alpha^2}. \qquad (3)$$

Supposons $\alpha < 0$, c'est-à-dire les deux points E, E' hors l'ellipse, l'expression de la tangente devient Fig. 55.

$$\text{tang V} = \frac{+(\alpha + a)2y}{-\frac{a^2 - b^2}{b^2}y^2 - 2a\alpha - \alpha^2} = -2\frac{(\alpha + a)y}{y^2\frac{a^2 - b^2}{b^2} + 2a\alpha + \alpha^2}.$$

On voit que tang V est toujours négative, donc l'angle EME' est obtus quel que soit le point pris sur la courbe au-dessus de l'axe Ax; si on voulait l'angle EM'E', il faudrait changer le signe de tangente V, et comme y devient < 0, il s'ensuit que l'expression ne changerait pas de signe. Tang V a son maximum, abstraction faite du signe, pour le point $y = b$; comme le maximum de tang V correspond au minimum de l'angle V, puisqu'il est obtus, il s'ensuit que l'angle minimum est ECE'; ce qui devait être, puisqu'on a, en prenant successivement tous les points compris entre A et C, des triangles ayant même base EE'; alors celui pour lequel la hauteur

Digitized by Google

relative à EE' sera un maximum aura à son sommet l'angle le plus petit ; d'après cela le point C est le sommet du triangle pour lequel ECE' est un minimum. Pour $y = b$ on a

$$\text{tang V} = -\frac{2(a+\alpha)b}{a^2 - b^2 + 2a\alpha + \alpha^2},$$

or du triangle EOC on tire

$$\text{EO} = \text{CO} \times \text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{V}, \text{ d'où tang}\,\frac{1}{2}\,\text{V} = \frac{a+\alpha}{b},$$

alors

$$\text{tang V} = \frac{\dfrac{2(a+\alpha)}{b}}{1 - \dfrac{a^2+\alpha^2+2a\alpha}{b^2}} = -\frac{2(a+\alpha)\,b}{a^2 - b^2 + 2a\alpha + \alpha^2},$$

Si y va en diminuant, tang V va diminuer, par suite l'angle V croît ; enfin pour $y = 0$, tang V $= 0$; mais comme cette expression avant d'arriver à zéro était négative, il s'ensuit que l'angle V est égal à deux droits ; ce qui doit-être, puisqu'en B et en A les deux lignes sont le prolongement l'une de l'autre.

Supposons que l'on fasse croître α, tang V va aller diminuant, ce qui montre que l'angle croît ; enfin pour $\alpha = \infty$, tang V $= 0$, donc les deux lignes sont le prolongement l'une de l'autre, car V $= 180°$; la figure le fait voir, puisque alors les deux lignes sont parallèles à l'axe Ax.

Fig. 56. Dans l'équation (3) faisons $\alpha = 0$, c'est-à-dire, supposons les deux points E, E' aux sommets A et B ; on a

$$\text{tang V} = \frac{2ay}{-\dfrac{a^2-b^2}{b^2}\,y^2} = \frac{-2ab^2}{(a^2-b^2)y}.$$

Pour $y = 0$, tang V $= \infty$, donc V $= 90°$; ce qui doit être, puisque la ligne AB est perpendiculaire sur la tangente en A à l'ellipse.

On voit que tant que y est > 0, tang V est négative, c'est-à-dire que tous les angles sont obtus.

Pour $y = b$ on a ACB qui est le maximum des angles qu'on peut former en joignant un des points de la courbe aux deux sommets,

Digitized by Google

sa tangente est $\frac{-2ab}{a^2-b^2}$; à partir de $y=b$ la tangente va en croissant, donc les angles diminuent ; pour $y=0$, tang $V=\infty$, l'angle est droit, la figure le démontre aussi, car AM est devenue tangente en B, et BM se confond avec BA.

L'angle dont la tangente est $-\frac{2ab}{a^2-b^2}$ est le maximum que peuvent former, comme on le verra plus tard, deux cordes supplémentaires. On voit que ces angles ont pour limite inférieure un droit, et pour limite supérieure ACB.

Cherchons maintenant la valeur maximum de l'angle de deux rayons vecteurs.

Pour cela dans l'équation il suffit de faire, d'après les considérations émises plus haut, $\alpha=a-\sqrt{a^2-b^2}$, et $y=b$; il vient Fig. 56.

$$\text{tang } V=\frac{2b\sqrt{a^2-b^2}}{-a^2+b^2+2a(a-\sqrt{a^2-b^2})-(a^2+a^2-b^2-2a\sqrt{a^2-b^2}}=$$

$$=\frac{2b\sqrt{a^2-b^2}}{2b^2-a^2},$$

expression qu'on peut obtenir directement, car du triangle FCO on tire

$$\text{tang } \frac{1}{2}V=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b};$$

donc

$$\text{tang } V=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b\left(1-\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)}=\frac{2b\sqrt{a^2-b^2}}{2b^2-a^2}.$$

Considérons enfin le point pour lequel $\alpha=a-b$, et cherchons l'angle maximum dans cette hypothèse ; la formule (3) donne Fig. 57.

$$\text{tang } V=\frac{2b^2}{-a^2+b^2+2a(a-b)-(a^2+b^2-2ab)}=\frac{2b^2}{0};$$

ainsi $V=90°$. Cette particularité s'explique, car les deux points E, E' sont les extrémités du diamètre de la circonférence dont le

Digitized by Google

centre est en O et dont le rayon est b. On prouve encore par là que les angles inscrits dans une demi-circonférence sont droits.

82.—Considérons l'hyperbole, alors dans l'équation (2) faisons $m = \frac{b^2}{a^2}$, $p = -\frac{b^2}{a}$; il vient

$$\text{tang V} = -2(\alpha - a)\frac{y}{\frac{a^2+b^2}{b^2}y^2 + 2a\alpha - \alpha^2}. \qquad (4)$$

Supposons $\alpha < 0$, c'est-à-dire que les deux points soient en dehors des sommets A et B, on a

$$\text{tang V} = +(\alpha + a)\frac{2y}{\frac{a^2+b^2}{b^2}y^2 - 2a\alpha - \alpha^2}. \qquad (5)$$

On doit observer que la formule (4) ne donne que les angles situés sur la ligne PAP_1; pour avoir les angles situés sur la branche $P'BP_2$ il suffit de changer le signe du second membre de l'équation (4); l'angle dont la tangente est donnée par l'équation (4) est le même, quelle que soit la branche que l'on considère, pourvu que les points de concours des deux droites aient même ordonnée. Ainsi EME' = EM'E', puisque leurs ordonnées MR, M'R' sont égales; de même $EM_1E' = EM'_1E' = EME'$, car pour avoir tang EM_1E' il faut changer le signe de l'expression donnée par la relation (4), puis en outre y faire $y < 0$; ces deux opérations faites, le signe de l'expression de la tangente n'a point changé. D'après cela il suffit de prendre les valeurs de y entre 0 et l'infini.

Reprenons l'hypothèse $\alpha < 0$, on voit par la valeur de tang V,
Fig. 58. que tant qu'on aura $y^2 < \frac{(2a\alpha + \alpha^2)b^2}{a^2+b^2}$, l'angle V sera plus grand que 90°. Puisque sa tangente est négative, pour $y = 0$, tang V = 0, et comme pour une valeur quelconque voisine de zéro, tang V est négative, il s'ensuit que V = 180°; ce qui doit être, puisque les deux lignes sont le prolongement l'une de l'autre.

Pour $y^2 = \frac{b^2(2a\alpha + \alpha^2)}{a^2+b^2}$, tang V = ∞, l'angle V est alors un droit.

Pour obtenir le point de l'hyperbole pour lequel $y^2 = \frac{b^2(2a\alpha + \alpha^2)}{a^2+b^2}$,

Digitized by Google

il suffit sur EE′ comme diamètre de décrire une circonférence ; les points P, P′, P_1, P_2 où elle coupe l'hyperbole sont les points satisfaisant à la condition que les angles EPE′, EP′E′, EP_1E', EP_2E' soient droits.

A partir de cette valeur $y = \frac{b\sqrt{2a\alpha + \alpha^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, tang V devient positive et va en décroissant, ce qui montre que l'angle V diminue ; pour $y = \infty$, tang V = 0, c'est-à-dire que V = 0 ; les deux lignes sont alors parallèles.

De ce qui précède on conclut que l'angle de deux lignes partant d'un point de l'hyperbole et allant aboutir à deux points E, E′, équidistants du centre et au delà des sommets, varie depuis 180° jusqu'à 0.

Supposons maintenant que les deux points E, E′ aillent en s'éloignant du centre, on voit que tang V va en diminuant, ce qui prouve que l'angle va en croissant, tant toutefois que tang V est négative. En résumé on peut dire que le calcul montre que pour un même point l'angle va en croissant à mesure que les points pris sur l'axe vont en s'écartant du centre.

De l'égalité $y^2 = \frac{b^2(2a\alpha + \alpha^2)}{a^2 + b^2}$ on déduit qu'à mesure que E, E′ s'éloignent du point O, le point où l'angle est droit va en s'éloignant du sommet.

Pour $\alpha = \infty$, tang V = 0, quel que soit y ; résultat qui fait voir, comme la figure le montre également, que les deux lignes sont parallèles.

Cherchons l'angle de deux rayons vecteurs, pour l'obtenir faisons $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2} - a$ dans l'équation (5), il vient Fig. 59.

$$\text{tang V} = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}\, y}{\frac{a^2 + b^2}{b^2} y^2 - b^2}.$$

Tout ce qu'on vient de dire pour les points E, E′ s'applique aux deux foyers F, F′.

Le point où l'angle des deux rayons vecteurs est droit, a pour ordonnée $y^2 = \frac{b^4}{a^2 + b^2}$; il y a sur cette courbe quatre points jouissant de cette propriété ; pour les obtenir par une construction géo-

Digitized by Google

AP $= x'$, AQ $= x''$; I étant le milieu de la corde MN, il faut prouver que AR $= \frac{-x''+x'}{2}$; par construction on a

$$AR = AQ - QR = +x'' - \frac{x''+x'}{2} = \frac{x''-x'}{2};$$

prenant maintenant AR avec son signe, il vient $x = \frac{x'-x''}{2}$, ce qui donne la valeur que fournit la règle générale.

Fig 60. Enfin prenons l'hypothèse de y', y'' ayant des signes contraires. Soient MP, NQ les deux ordonnées y', y''; par le point M tirons une parallèle à Ax, soit MH, puis prolongeons I R jusqu'à MH. Du triangle NMH on tire IS $= \frac{NH}{2}$, vu que le point I est le milieu de MN.

$$\frac{1}{2}\,NH = \frac{y'+y''}{2} = IS, \text{ or } IR = IS - RS = IS - y',$$

donc

$$IR = y = \frac{y''+y'}{2} - y' = \frac{y''-y'}{2}$$

Les ordonnées y', y'' peuvent occuper les positions MP, M'P'; d'après la formule l'ordonnée I'H du point I', milieu de MM', doit être $\frac{y'-y''}{2}$; en effet, menons M'D parallèle à Ax, soit D le point où elle coupe MP, on a dans le triangle MM'D,

Fig. 61.

$$I'R' = \frac{MD}{2} = \frac{y'+y''}{2}; \text{ or } I'H = I'R' - HR' = \frac{y'+y''}{2} - y'' = \frac{y'-y''}{2};$$

ainsi on voit que dans ce cas la formule est démontrée. Donc, en général, les coordonnées du milieu d'une corde sont

$$x = \frac{x'+x''}{2}, \quad y = \frac{y'+y''}{2},$$

x', x'', y', y'' étant les coordonnées de ses extrémités prises avec

Digitized by Google

leur signe, ou en un mot $x'+x''$, $y'+y''$ étant des sommes algébriques.

Cherchons maintenant les points d'intersection de la droite $y=\alpha x+\beta$ avec la courbe. Pour cela éliminons y entre les équations

$$(1)\qquad y=\alpha x+\beta$$
$$(2)\qquad y^2=mx^2+2px;$$

il vient

$$\alpha^2x^2+\beta^2+2\beta\alpha x=mx^2+2px\text{ ; ou }x^2(\alpha^2-m)+2x(\beta\alpha-p)+\beta^2=0.$$

Or, dans une équation du deuxième degré ramenée à la forme $x^2+px+q=0$, on sait que le coefficient de x est la somme des racines prises en signe contraire ; alors on aura $x=\frac{p-\alpha\beta}{\alpha^2-m}$; ayant l'abscisse du milieu de la corde, pour avoir l'ordonnée il faut dans l'équation (1) mettre pour x la valeur trouvée; il vient alors

$$y=\frac{p-\alpha\beta}{\alpha^2-m}\alpha+\beta=\frac{p\alpha-\alpha^2\beta+\beta\alpha^2-m\beta}{\alpha^2-m}=\frac{p\alpha-m\beta}{\alpha^2-m}.$$

Ainsi les coordonnées du milieu de la corde sont donc

$$(3)\qquad x=\frac{p-\alpha\beta}{\alpha^2-m},\qquad y=\frac{p\alpha-m\beta}{\alpha^2-m}.\qquad (4)$$

Éliminant β entre ces deux équations, on aura la relation entre les coordonnées des milieux d'un système de cordes parallèles, c'est-à-dire l'équation du lieu cherché.

Pour effectuer cette élimination, multiplions les deux membres de l'équation (3) par m, et ceux de l'équation (4) par α, et retranchons ces équations membres à membres; il vient

$$y\alpha-mx=\frac{p\alpha^2-mp}{\alpha^2-m}=\frac{p(\alpha^2-m)}{\alpha^2-m},$$

divisant les deux termes de la fraction du deuxième membre par α^2-m, on a $y\alpha-mx=p$, d'où l'on tire $y=\frac{m}{\alpha}x+\frac{p}{\alpha}$. Par cette

Digitized by Google

équation on voit que le diamètre est une ligne droite, quelle que soit la valeur de α; donc dans une courbe du deuxième degré les diamètres sont des lignes droites.

84.—On va démontrer que tous les diamètres passent par le centre de la courbe. En effet, faisons $y = 0$, dans l'équation

$$y = \frac{m}{\alpha} x + \frac{p}{\alpha}, \quad \text{il vient } x = -\frac{p}{m};$$

ce qui n'est autre chose que l'abscisse du centre de la courbe qu'on sait se trouver sur l'axe des x.

Supposons $m = 0$, c'est-à-dire que la courbe soit une parabole, alors $x = \infty$; donc dans la parabole tous les diamètres sont parallèles à l'axe des x; ce qu'on devait prévoir, car tous les diamètres passant par le centre de la courbe, il s'ensuit que lorsque ce dernier point est à l'infini, comme dans la parabole, les diamètres sont parallèles à l'axe des x.

L'équation $y = \frac{m}{\alpha} x + \frac{p}{\alpha}$, qui est celle du diamètre correspondant au système de cordes parallèles $y = \alpha x + \beta$, montre que toutes lignes qui passent par le centre sont des diamètres; car $\frac{m}{\alpha}$ peut passer par tous les états de grandeur, vu que la tangente α varie entre $-\infty$ et ∞; donc en posant $\frac{m}{\alpha} = K'$, la valeur $\alpha = \frac{m}{K}$ fournira toujours une valeur réelle déterminant les cordes qui correspondent au diamètre $y = \frac{m}{\alpha} x + \frac{p}{\alpha}$.

Fig. 62. 85.—Prenons les systèmes de cordes parallèles $y = \alpha x + \beta$ et $y = \alpha' x + \beta'$, les diamètres qui leur correspondent ont pour équation

$$y = \frac{m}{\alpha} x + \frac{p}{\alpha} \quad \text{et } y = \frac{m}{\alpha'} x + \frac{p}{\alpha'};$$

posons $a = \frac{m}{\alpha}$ et $a' = \frac{m}{\alpha'}$, de là on déduit $aa' = \frac{m^2}{\alpha\alpha'}$; maintenant supposons $\alpha' = \frac{m}{\alpha}$, c'est-à-dire que le second système de cordes soit parallèle au diamètre relatif au premier, ainsi que MN soit paral-

Digitized by Google

lèle à PQ; il vient en remplaçant α' par sa valeur dans l'égalité $aa' = \frac{m^2}{\alpha\alpha'}$, $aa' = m$; mais de l'hypothèse $\alpha' = \frac{m}{\alpha}$ on tire $\alpha = \frac{m}{\alpha'}$, ce qui veut dire que si un diamètre est parallèle à un système de cordes parallèles, le diamètre de ces cordes est parallèle au premier système; donc P'Q' relatif à MN est parallèle à AB; on voit qu'un tel système de diamètres, qu'on nomme conjugués, a cette propriété que le produit des tangentes des angles qu'ils font avec l'axe des x est constant, et égal à $-\frac{b^2}{a^2}$ dans l'ellipse, et à $\frac{b^2}{a^2}$ dans l'hyperbole.

86.—Dans toute courbe du second degré la tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle au système de cordes relatif à ce diamètre.

En effet, soit (x', y') le point de contact de la tangente, l'équation de cette ligne est Fig. 62.

$$yy' = mxx' + p(x + x') \quad \text{ou} \quad y = \frac{mx' + p}{y'}x + \frac{px'}{y'}.$$

Cherchons celle du diamètre passant par ce point, les équations du centre sont $y = 0$, $x = -\frac{p}{m}$, alors l'équation du diamètre sera

$$y = \frac{y'}{x' + \frac{p}{m}}\left(x + \frac{p}{m}\right), \quad \text{ou} \quad y = \frac{my'}{mx' + p}\left(x + \frac{p}{m}\right).$$

D'après la relation qui existe entre un diamètre et sa corde, il s'ensuit que si $y = \alpha x + \beta$ est la corde relative au diamètre $y = \frac{my'}{mx' + p}\left(x + \frac{p}{m}\right)$, on a

$$\alpha\frac{my'}{mx' + p} = m, \quad \text{d'où } \alpha = \frac{mx' + p}{y'};$$

par suite l'équation de la corde est $y = \frac{mx' + p}{y'}x + \beta$, or celle de la tangente à l'extrémité du diamètre est $y = \frac{mx' + p}{p}x + \frac{px'}{y'}$. Donc la tangente est parallèle aux cordes relatives au diamètre qui

Digitized by Google

passe à son point de contact ; ainsi PQ étant un diamètre, la tangente en P à la courbe, que l'on désigne par CD, est parallèle à la corde AB relative à PQ.

On appelle cordes supplémentaires, deux cordes partant d'un même point de la courbe et parallèles à deux diamètres conjugués. D'après cette définition, il suit que si $y = \alpha x + \beta$ et $y = \alpha' x + \beta$ sont les équations de deux cordes supplémentaires $\alpha\alpha' = m$. Donc le produit des tangentes des angles que font deux cordes supplémentaires avec l'axe des x est constant et égal à $m = -\frac{b^2}{a^2}$ pour l'ellipse, et $m = \frac{b^2}{a^2}$ pour l'hyperbole.

87.—La relation $aa' = m$ entre deux diamètres conjugués, montre qu'il y a une infinité de systèmes de diamètres conjugués, car $a' = \frac{m}{a}$ donne, quelle que soit la valeur de a, une valeur réelle pour a', et comme a' peut varier entre l'infini négatif et l'infini positif, il s'ensuit qu'un diamètre étant donné, on en trouvera toujours un second qui forme avec le premier un système de diamètres conjugués ; on conclut de là qu'il y a une infinité de cordes supplémentaires partant d'un même point de la courbe.

88.—On va démontrer que deux cordes supplémentaires quelconques aboutissent toujours sur la courbe à l'extrémité d'un même diamètre.

Fig. 63. Soient CD, CB deux cordes supplémentaires parallèles aux diamètres conjugués PQ, P'Q', il faut prouver que la ligne DB qui joint les extrémités de ces cordes est un diamètre ; pour cela il suffit de prouver que les ordonnées des points B, D sont égales et de signes contraires, car il s'ensuivra que le point O où BD coupe l'axe des x sera le milieu de BD, et par suite qu'il est le centre de la courbe. Soit $(x' y')$ le point C, puis $y - y' = \alpha (x - x')$ l'équation de CB, celle de CD sera $y - y' = \frac{m}{\alpha}(x - x')$. Pour avoir les ordonnées des points B, D, il faudra éliminer x successivement entre les équations (1), (2) et (1), (3), l'équation (1) étant celle de la courbe.

$$(1) \qquad y^2 = mx^2 + 2px,$$
$$(2) \qquad y - y' = \alpha (x - x'),$$
$$(3) \qquad y - y' = \frac{m}{\alpha}(x - x').$$

Digitized by Google

L'élimination de x entre (1), (2) donne

$$y^2 = m\left[x'^2 + \frac{(y-y')^2}{\alpha^2} + \frac{2x'(y-y')}{\alpha}\right] + 2px' + 2p\frac{y-y'}{\alpha},$$

réduisant tous les termes au même dénominateur et ordonnant par rapport à y, il vient

$$y^2(\alpha^2-m) - 2y(my'+2\alpha x'+p\alpha) - mx'^2\alpha^2 - my'^2 + 2\alpha x'ym - \\ - 2p\alpha^2x' + 2p\alpha y' = 0,$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$(4) \qquad y^2 - 2y\frac{my'+\alpha x'+p\alpha}{\alpha^2-m} + \\ + \frac{-m\alpha^2x'^2 - my'^2 + 2\alpha mx'y' - 2p\alpha^2x' + 2p\alpha y'}{\alpha^2-m} = 0.$$

Dans une équation du deuxième degré le terme indépendant de l'inconnue est le produit des racines prises en signe contraire ; or ici l'une des racines est y', donc si on divise le dernier terme de l'équation (4) par $+y'$, le quotient pris en signe contraire sera l'ordonnée du deuxième point d'intersection de la droite avec la courbe.

Le terme indépendant de y est

$$\frac{-\alpha^2(mx'^2+2px') + 2\alpha mx'y' - my'^2 + 2p\alpha y'}{\alpha^2-m};$$

remarquant que le point $x'y'$ étant sur la courbe $y'^2 = mx'^2 + 2px$, alors mettant pour $mx'^2 + 2px'$ sa valeur dans le produit des racines, il vient

$$\frac{-\alpha^2y'^2 + 2m\alpha x'y' + 2p\alpha y' - my'}{\alpha^2-m},$$

ce qui donne, divisé par y',

$$y'' = \frac{-\alpha^2y' + 2m\alpha x' + 2p\alpha - my'^2}{\alpha^2-m}.$$

Maintenant cherchons l'ordonnée du second point de sécance de la deuxième corde.

Digitized by Google

Pour cela il faudrait éliminer x entre les équations (1), (3), puis faire les mêmes opérations que pour l'élimination précédente ; mais pour abréger il suffit de remarquer que les équations des deux droites sont identiques, à cela près que la deuxième a pour coefficient $\frac{m}{\alpha}$ au lieu de α; donc pour passer des résultats obtenus pour la première droite à ceux qu'on veut obtenir pour la deuxième, il suffit d'y remplacer α par $\frac{m}{\alpha}$; en conséquence on a pour y''', qui désigne l'ordonnée du second point de sécance de la deuxième corde, la valeur suivante

$$y''' = \frac{-y'\left(\frac{m^2}{\alpha^2}+m\right)+2mx'\frac{m}{\alpha}+2p\frac{m}{\alpha}}{\frac{m^2}{\alpha^2}-m};$$

réduisant tous les termes au même dénominateur, il vient

$$y''' = \frac{-y'(m+\alpha^2)+2m\alpha x'+2p\alpha}{m-\alpha^2}$$

ou

$$y''' = -\frac{-y'(m+\alpha^2)+2m\alpha x'+2p\alpha}{\alpha^2-m}.$$

On voit par cette valeur que y'', y''' sont des ordonnées égales, mais de signes contraires ; donc la ligne BD est un diamètre, donc deux cordes supplémentaires aboutissent toujours à l'extrémité d'un même diamètre.

89.—Maintenant démontrons la réciproque qui consiste en ce que deux lignes qui partent des extrémités d'un même diamètre, et qui sont parallèles à un système de diamètres conjugués, se coupent sur la courbe.

Soient x', y' les coordonnées d'une des extrémités du diamètre, celles de la deuxième extrémité seront $+x''$, $-y'$, en conséquence les équations des deux cordes partant de ces points seront

$$y-y' = \alpha(x-x'), \quad y+y' = \frac{m}{\alpha}(x-x'').$$

Pour avoir les points où chacune de ces deux cordes va couper

Digitized by Google

la courbe, on va combiner l'équation (1) avec les deux autres (2), (3) successivement.

$$(1) \qquad y^2 = mx^2 + 2px,$$
$$(2) \qquad y - y' = \alpha(x - x'),$$
$$(3) \qquad y + y' = \frac{m}{\alpha}(x - x'').$$

En se servant des calculs faits dans la question précédente, on trouve que l'ordonnée du second point où la droite dont l'équation $y - y' = \alpha(x - x')$ coupe la courbe, est

$$y'' = \frac{-y'(\alpha^2 + m) + 2m\alpha x' + 2p\alpha}{\alpha^2 - m}.$$

Pour avoir l'ordonnée du second point où la droite $y + y' = \frac{m}{\alpha}(x - x'')$ coupe la courbe, il faut remplacer dans la valeur de y'', α par $\frac{m}{\alpha}$, puis x' et y' par $+x''$ et $-y'$; d'après cela il vient

$$y''' = \frac{y'\left(\frac{m^2}{\alpha^2} + m\right) + 2m\frac{m}{\alpha}x'' + 2p\frac{m}{\alpha}}{\frac{m^2}{\alpha^2} - m} = \frac{y'(\alpha^2 + m) + 2m\alpha x'' + 2p\alpha}{m^2 - \alpha^2};$$

changeant les signes des deux termes de la fraction représentant y''', il vient

$$y''' = \frac{-y'(\alpha^2 + m) - 2m\alpha x'' - 2p\alpha}{\alpha^2 - m}.$$

On voit que les ordonnées y'', y''' ne sont pas égales, cela tient à ce que dans le calcul on n'a pas introduit toutes les conditions nécessaires pour que les deux points soient aux extrémités d'un même diamètre. Le grand axe de l'ellipse et l'axe transverse de l'hyperbole ont pour expression $-\frac{2p}{m}$; pour que les deux points B, D soient les extrémités du diamètre BD, il faut que les ordonnées soient égales et de signe contraire, puis ensuite que la somme de leurs abscisses soit $-\frac{2p}{m}$; car dans l'ellipse AH = A'H', et par

Digitized by Google

suite $AH + AH' = AA' = -\frac{2p}{m} = x' + x''$. Dans l'hyperbole x, x'' sont de signe contraire, $AH = A'H'$, puisque O est le milieu de HH'; donc $AH' - AH = AA'$; prenant ces quantités avec leurs signes, on a $-x'' + x' = -\frac{2p}{m}$; ainsi il faut que la somme algébrique $x'' + x' = -\frac{2p}{m}$, puis ensuite que les coordonnées soient égales et de signe contraire pour que les points B, D soient les extrémités d'un même diamètre.

De la condition $x'' + x' = -\frac{2p}{m}$, on tire $x'' = -x' - \frac{2p}{m}$, mettant pour x'' sa valeur dans l'expression de l'ordonnée y''', il vient

$$y''' = \frac{-y'(\alpha^2 + m)\, 2m\alpha x' + 2m\alpha \frac{2p}{m} - 2p\alpha}{\alpha^2 - m} =$$

$$= \frac{-y'(\alpha^2 + m) + 2m\alpha x' + 2p\alpha}{\alpha^2 - m}.$$

Cette nouvelle expression de y''' montre qu'on a $y'' = y'''$; donc les deux cordes se coupent sur la courbe; donc si des extrémités d'un même diamètre on tire des parallèles à deux diamètres conjugués, ces lignes se coupent sur la courbe.

90.—Cette propriété peut se démontrer directement par la géométrie, en se basant sur les théorèmes précédemment démontrés.

Fig. 64. Supposons que les deux cordes BC, CD, parallèles à deux diamètres conjugués, se coupent en un point C qui ne soit pas sur la courbe, d'après la propriété des diamètres conjugués, on a tang $CMx \times$ tang $CN'x = m$; soit E le point où CB coupe la courbe; joignons E à D, les deux cordes EB, ED sont supplémentaires, et pour cela on a tang $EMx \times$ tang $ENx = m$; comparant cette égalité à la première, on en tire tang $ENx =$ tang $CN'x$, donc les angles ENx, $CN'x$ sont égaux; donc la partie égale le tout, ce qui ne peut être. Si les deux cordes se coupaient à l'intérieur en K, on aurait d'abord par hypothèse tang $KMx \times$ tang $KN''x = m$; prolongeons KB jusqu'à la courbe en E, et joignons E à D, les deux cordes EB, ED sont supplémentaires, donc tang $EMx \times$ tang $ENx = m$; comparant cette égalité avec la précédente, on déduit

Digitized by Google

que tang $KN''x =$ tang ENx, ou $KN''x = ENx$, ce qui ne peut être, car la partie ne peut égaler le tout. Donc deux cordes qui partent des extrémités d'un même diamètre, parallèlement à un système de diamètres conjugués, se coupent sur la courbe.

91.—Cherchons l'angle de deux cordes supplémentaires données par leurs équations.

Soient $y = \alpha x + \beta$, $y = \frac{m}{\alpha} x + \beta'$ les équations des cordes AB, CB. Désignons par V l'angle demandé; par l'origine des coordonnées tirons une parallèle à la première, elle va couper la courbe en un second point D, qui, joint à l'autre extrémité de l'axe, donne la parallèle DN à la seconde corde. En conséquence on est ramené à trouver l'angle des deux lignes DM et DN. Soit (x, y) le point où la ligne $y = \alpha x$ coupe la courbe. Prenons l'équation (2) au n° 51, et faisons-y $\alpha = 0$, on a Fig. 64 *bis*.

$$\text{tang V} = -\frac{2p}{y(m-1)}. \qquad (1)$$

Pour obtenir la valeur de y entre les équations

$$y = \alpha x, \quad y^2 = mx^2 + 2px,$$

éliminons x; il vient $y = \frac{2p\alpha}{\alpha^2 - m}$, substituant à y sa valeur dans l'expression de tang V, on a

$$\text{tang V} = -\frac{\alpha^2 - m}{\alpha(1+m)}.$$

Telle est la valeur de la tangente de l'angle de deux cordes supplémentaires données par leurs équations.

Posons $\frac{\alpha^2 - m}{\alpha(1+m)} = K$, d'après cette hypothèse on a

$$\alpha = \frac{K(1+m) \pm \sqrt{K^2(1+m)^2 + 4m}}{2}. \qquad (2)$$

On voit qu'à un angle donné correspondent deux cordes supplémentaires. Les courbes étant symétriques par rapport à l'axe des x, on ne considérera que la partie située au-dessus de cet axe. Les points où aboutissent ces deux cordes sont sur la courbe à la

Digitized by Google

même distance de l'axe des x, l'équation (1) le prouve. La valeur minimum de K correspond à la valeur maximum de V, et réciproquement.

Dans l'équation (2) remplaçons m, p par $-\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{b^2}{a}$, il vient

$$\alpha = \frac{K(a^2-b^2) \pm \sqrt{K^2(a^2-b^2)-4a^2b^2}}{2a}.$$

Pour que α soit réel, il faut que l'on ait $K(a^2-b^2) > 2a^2b$, ou au moins $K(a^2-b^2) = 2ab$; donc la valeur minimum de K est $K = \frac{2ab}{a^2-b^2}$; alors $\tang V = -\frac{2ab}{a^2-b^2}$, or on sait que l'angle V est MQN, c'est-à-dire l'angle que forment les deux cordes partant d'une des extrémités du petit axe et allant aux extrémités du grand.

De ce que l'angle MQN est l'angle maximum de deux cordes supplémentaires, il s'ensuit que son supplément M'QN est le minimum des angles que peuvent former deux cordes supplémentaires.

Pour $K = \frac{2ab}{a^2-b^2}$ les deux valeurs de α sont égales; donc il n'y a qu'une position où deux cordes supplémentaires peuvent former l'angle maximum ; ce qu'on savait déjà.

92.—Supposons maintenant qu'un angle étant donné il faille trouver dans l'ellipse deux diamètres conjugués faisant entre eux cet angle ; la question se réduit évidemment à trouver deux cordes supplémentaires faisant entre elles l'angle donné. Le calcul permet, au moyen de l'équation (2), de résoudre la question ; il ne nous reste plus qu'à donner un procédé graphique.

Fig. 104. Soit XYZ l'angle que l'on suppose compris entre les limites posées ci-dessus. Sur un diamètre quelconque CC' décrivons un segment capable de l'angle donné, la circonférence va couper l'ellipse en quatre points C, C', D, D'. L'arc correspondant au segment capable de l'angle XYZ ne coupe l'ellipse qu'en un seul point D, qui, joint aux points C, C', donne les cordes C'D, CD faisant entre elles l'angle donné. La même circonférence coupe la courbe en un second point D' qui, joint à C et C', donne les cordes D'C, D'C', dont l'angle est supplément de l'angle donné ; mais si on tire les diamètres MM', NN' parallèles aux cordes CD, C'D, on a un premier

Digitized by Google

système de diamètres conjugués faisant entre eux l'angle donné. Les diamètres PP′ et QQ′ étant parallèles aux cordes D′C, D′C′, on a une seconde solution du problème, car ces deux diamètres font quatre angles, dont deux sont égaux à l'angle CD′C′ et les deux autres égaux à son supplémentaire, c'est-à-dire à l'angle donné XYZ.

Ainsi dans l'ellipse il y a deux systèmes de diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné; il ne peut pas y en avoir davantage, car une circonférence ne peut couper une ellipse en plus de quatre points.

Les deux systèmes de diamètres conjugués se réduisent à un seul, lorsque les cordes sont parallèles à celles qui vont d'une des extrémités du petit axe aux extrémités du grand, et lorsqu'elles sont perpendiculaires entre elles. Ce cas se présente lorsque l'on veut trouver les axes.

93.—Reprenons l'équation (2)

$$\alpha = \frac{K(1+m) \pm \sqrt{K^2(1+m)^2 + 4m}}{2},$$

faisons $m = \frac{b^2}{a^2}$, il vient

$$\alpha = \frac{K(a^2+b^2) \pm \sqrt{K^2(a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2}}{2a}.$$

On voit que dans l'hyperbole, quelle que soit la valeur de K, c'est-à-dire quel que soit l'angle donné il y a toujours deux cordes supplémentaires faisant entre elles cet angle.

L'équation

$$\text{tang } V = -\frac{2p}{y(m+1)} = \frac{2ab^2}{y(m+1)}$$

montre que les angles de deux cordes supplémentaires sont toujours moindre que 90°, c'est-à-dire qu'ils sont tous aigus; leurs valeurs varient entre 0 et 90°, puisque tang V varie entre ∞ et 0.

L'expression de α, comme pour l'ellipse, permet de trouver deux diamètres conjugués faisant un angle donné. Pour les déterminer graphiquement, sur un diamètre quelconque BC décrivons un segment capable de l'angle donné, cette circonférence coupe l'hyperbole en quatre, B, C, D, D′. Supposons que le point appartienne à l'arc Fig. 93.

Digitized by Google

correspondant au segment capable de l'angle donné; tirons les lignes DB, DC, on détermine ainsi deux cordes supplémentaires faisant entre elles l'angle donné; si on mène les deux diamètres HH', LL' parallèles à ces cordes, on a un système de diamètres conjugués répondant à la question. Joignons D' aux extrémités du diamètre BC, les cordes D'B, D'C font un angle qui est le supplément de l'angle donné; donc si on mène des diamètres qui leur soient parallèles, on obtient $H_1H'_1$, $L_1L'_1$ donnant un second système de diamètres conjugués faisant entre eux l'angle donné.

Ainsi il n'y a que deux systèmes de diamètres conjugués dans l'hyperbole à faire entre eux un angle donné. Ces deux systèmes se réduisent à un seul lorsque l'angle est égal à celui des asymptotes ou bien qu'il est droit.

94.—Des propriétés des cordes supplémentaires on va déduire une méthode graphique pour la construction d'une tangente en un point donné sur la courbe, ou parallèlement à une ligne donnée.

Fig. 65. Considérons le premier cas; soit M le point donné sur la courbe, je tire le diamètre MN allant au point de contact, on sait que la tangente en M est parallèle aux cordes relatives à ce diamètre, alors cherchons une de ces cordes. Pour y arriver tirons une corde CB parallèle à MN, puis traçons la corde CD supplémentaires de CB, CB étant parallèle à MN, CD est parallèle au diamètre conjugué de MN, et par suite CD est une des cordes relatives au diamètre NM; donc en tirant par le point M une parallèle à CD, on aura dans cette ligne MT la tangente à la courbe; si au point N on tire une tangente, on voit qu'elle sera parallèle à MN; donc les tangentes aux extrémités d'un même diamètre sont parallèles.

Fig. 65. 95.—Prenons le cas où on demande une tangente parallèle à une ligne donnée. Soit XY cette ligne. La question se réduit à trouver le point de contact; dans ce but je tire la corde CD parallèle à XY, puis sa supplémentaire CB. Menons le diamètre MN parallèle à CB, les points M, N sont deux points répondant à la question; car si par ces points on tire des parallèles à CD, on a deux tangentes MT, NT' qui étant parallèles à CD le sont à la ligne donnée XY, puisque CD a été tirée parallèlement à la ligne donnée. On voit que ces méthodes sont beaucoup plus simples que celles exposées précédemment.

96.—On a trouvé qu'entre deux diamètres conjugués il y a la relation $aa' = m$; pour qu'ils soient perpendiculaires il faut que $aa' = -1$, ou $m = -1$; dans le cas où la courbe est une ellipse,

Digitized by Google

$m = -\frac{b^2}{a^2}$; donc dans l'ellipse il n'y a de diamètres conjugués rectangulaires que les deux axes de la courbe; dans le cas où la courbe est une circonférence $b = a$, alors $m = -1$; ce qui prouve que tous les diamètres conjugués sont rectangulaires. Dans l'hyperbole $m = +\frac{b^2}{a^2}$, par conséquent m ne peut être égal à -1; donc dans cette courbe il n'y a de diamètres rectangulaires que les deux axes. Ainsi on voit que dans les courbes du second degré à centre il n'y a qu'un système de diamètres conjugués rectangulaires, qui sont les axes de la courbe; la circonférence fait seule exception, cette courbe ayant tous ses diamètres conjugués rectangulaires.

97.—L'équation des courbes à centre, rapportée à deux diamètres conjugués, est de la forme $Mx^2 + Ny^2 = P$; car les cordes relatives à l'un des diamètres étant parallèles à l'autre, il s'ensuit qu'à une abscisse correspondront deux ordonnées égales et de signes contraires; donc il n'y a dans l'équation qu'un terme en y qui est du second degré; le même raisonnement prouve que le seul terme en x, que doit contenir l'équation, est du second degré; ainsi l'équation doit être de la forme indiquée ci-dessus.

Prenons pour axe de coordonnées un diamètre et une tangente à son extrémité, l'équation de la courbe devra être de la forme $My^2 + Nx^2 + Qx = 0$; car l'origine étant sur la courbe, il ne doit pas y avoir de terme indépendant des variables; en outre la tangente étant parallèle aux cordes que divise le diamètre, qui vient à son point de contact, en deux parties égales, il s'ensuit qu'à une abscisse correspondront deux valeurs de y égales et de signes contraires. Ainsi l'équation de la courbe doit être de la forme $My^2 + Nx^2 + Qx = 0$. On va démontrer qu'il n'y a que pour un tel système d'axes que la courbe peut avoir une équation de cette forme.

L'équation des courbes du second degré, rapportées à leur sommet et à l'axe passant à ce sommet, est $y^2 = mx^2 + 2px$, on va chercher les conditions pour que l'équation de ces courbes conserve la même forme, les axes de coordonnées étant obliques.

Les formules pour passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques, sont $x = a + x' \cos \alpha + y' \cos \alpha'$, $y = b + x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'$, a, b étant les coordonnées de la nouvelle origine; remplaçant x, y par ces valeurs dans l'équation de la courbe, il vient

Digitized by Google

$$(b + x' \sin\alpha + y' \sin\alpha')^2 = m(a + x' \cos\alpha + y' \cos\alpha') + 2p(a + x' \cos\alpha + y' \cos\alpha'). \qquad (1)$$

Développant et ordonnant par rapport à y', l'équation (1) devient

$$y'^2 (m \cos^2\alpha' - \sin^2\alpha') + x'y' (2m \cos\alpha \cos\alpha' - 2 \sin\alpha \sin\alpha') + \\ + y' \begin{pmatrix} 2\, ma \cos\alpha' - 2b \sin\alpha' \\ + 2p \cos\alpha' \end{pmatrix} + x'^2 (m \cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \\ + x' (2ma \cos\alpha - 2b \sin\alpha + 2p \cos\alpha) + ma^2 + 2pa - b^2 = 0.$$

Pour que cette équation soit de la forme $y^2 = mx^2 + 2px$, il faut qu'on ait

$$(2) \qquad m \cos\alpha \cos\alpha' - \sin\alpha \sin\alpha' = 0,$$

$$(3) \qquad b^2 - ma^2 - 2pa = 0,$$

$$(4) \qquad ma \cos\alpha' - b \sin\alpha' + p \cos\alpha' = 0.$$

La condition (3) indique qu'il faut qne l'origine des coordonnées soit sur la courbe.

L'équation (2) peut se mettre sous la forme tang α tang $\alpha' = m$, égalité qui montre qu'il faut que les axes soient parallèles à un système de diamètres conjugués. On va montrer que l'axe des y est tangent à la courbe; en effet, l'équation (4) peut se mettre sous la forme tang $\alpha' = \frac{ma + p}{b}$, or l'équation de la tangente à la courbe au point $x = a$, $y = b$, est $y = \frac{ma + p}{b} + \frac{pa}{b}$; donc le nouvel axe des y et la tangente de la courbe à la nouvelle origine des axes de coordonnées sont parallèles, puisque les angles qu'ils font avec l'ancien axe des x ont des tangentes égales. Donc le nouvel axe des y est tangent à la courbe à l'origine des nouvelles coordonnées. De ce que les nouveaux axes sont parallèles à un système de diamètres conjugués, puis en outre de ce que l'axe des y est tangent à l'origine à la courbe, il s'ensuit que l'axe des x est un diamètre de la courbe. Donc pour qu'un système d'axes de coordonnées soit tel que l'équation de la courbe ait la forme $y^2 = mx^2 + 2px$, il faut et il suffit que l'origine soit en un point de la courbe, puis ensuite que les axes soient l'un tangent à l'origine des coordonnées, et l'autre diamètre de la courbe.

Digitized by Google

98.—Ayant égard aux équations (2), (3), (4), l'équation (1) devient

$$y'^2(m\cos^2\alpha' - \sin^2\alpha') + x'^2(m\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \\ + 2x'(ma\cos\alpha - b\sin\alpha + p\cos\alpha) = 0.$$

Les points où la courbe coupe l'axe des x sont

$$y' = 0, \quad x' = 0, \quad x' = \frac{2(ma\cos\alpha - b\sin\alpha + p\cos\alpha)}{\sin^2\alpha - m\cos^2\alpha}.$$

Si on désigne par A', B' les demi-diamètres conjugués parallèles aux axes, on a

$$A' = \frac{ma\cos\alpha - b\sin\alpha + p\cos\alpha}{\sin^2\alpha - m\cos^2\alpha}.$$

Pour obtenir B' mettons pour x la valeur $x = A'$ dans l'équation de la courbe, on a alors

$$y'^2(m\cos^2\alpha' - \sin^2\alpha') + \frac{(m\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(ma\cos\alpha - b\sin\alpha + p\cos\alpha)^2}{(\sin^2\alpha - m\cos^2\alpha)^2} + \\ + 2\frac{(ma\cos\alpha - b\sin\alpha + p\cos\alpha)^2}{m\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = 0;$$

réduisant tous les termes au même dénominateur, puis résolvant l'équation par rapport à y, il vient

$$y'^2 = \frac{(\sin^2\alpha - m\cos^2\alpha)^2(ma\cos^2\alpha - b\sin\alpha + p\cos\alpha)^2 + \\ + 2(ma\cos\alpha - b\sin\alpha + p\cos\alpha)^2(\sin^2\alpha - m\cos^2\alpha)}{(\sin^2\alpha - m\cos^2\alpha)^2} \\ \frac{}{(m\cos^2\alpha' - \sin^2\alpha')},$$

d'où on tire

$$B'^2 = \frac{(\sin^2\alpha - m\cos^2\alpha)(ma\cos\alpha + p\cos\alpha - b\sin\alpha) + \\ + 2(ma\cos\alpha + p\cos\alpha - b\sin\alpha)^2}{(\sin^2\alpha - m\cos^2\alpha)} \\ \frac{}{(m\cos^2\alpha' - \sin^2\alpha')}.$$

Ainsi les équations qui déterminent deux diamètres conjugués, l'extrémité de l'un d'eux étant fixée, sont

Digitized by Google

$$\operatorname{tang}\alpha \times \operatorname{tang}\alpha' = m, \quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{ma+p}{b}, \quad b^2 = ma^2 + 2pa.$$

$$A' = \frac{\cos\alpha\,(ma+p) - b\sin\alpha}{\cos^3\alpha\,(\operatorname{tang}^2\alpha - m)},$$

$$B'^2 = \frac{\cos^3\alpha\,(\operatorname{tg}^2\alpha - m)\,(ma+p-b\operatorname{tg}\alpha)^2\cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha\,(ma+p-b\operatorname{tg}\alpha)^2}{\cos^2\alpha\,(\operatorname{tang}^2\alpha - m)\,(m - \operatorname{tang}^2\alpha')\cos^2\alpha'}.$$

Les valeurs de A', B'^2 peuvent encore se mettre sous la forme

$$A' = \frac{ma+p-b\operatorname{tang}\alpha}{\cos\alpha\,(\operatorname{tang}^2\alpha - m)},$$

$$B'^2 = \frac{\cos^3\alpha\,(\operatorname{tang}^2\alpha - m)\,(ma+p-b\operatorname{tang}\alpha)^2 + 2\,(ma+p-b\operatorname{tang}\alpha)^2}{\cos^2\alpha'\,(\operatorname{tang}^2\alpha - m)\,(m - \operatorname{tang}^2\alpha')}.$$

99.—On va maintenant chercher l'équation de la courbe rapportée à son centre et à deux diamètres conjugués ; on a vu qu'à de tels axes l'équation était de la forme $Mx^2 + Ny + P = 0$. Ainsi cherchons les conditions nécessaires pour que l'équation (1) puisse être ramenée à cette forme.

On voit à l'inspection de l'équation qu'il faut qu'on ait

$$\text{(U)} \qquad m\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha' = 0,$$

$$\text{(V)} \qquad \cos\alpha'\,(ma+p) - b\sin\alpha' = 0,$$

$$\text{(X)} \qquad \cos\alpha\,(ma+p) - b\sin\alpha = 0.$$

L'équation (U) peut se mettre sous la forme $\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\alpha' = m$, c'est-à-dire qu'il faut que les deux axes soient parallèles à un système de diamètres ; mais comme ils passent par le centre, dont $b = 0$, $a = -\frac{p}{m}$ sont les coordonnées, il s'ensuit que ce sont ces diamètres eux-mêmes. Les équations (V), (X) sont satisfaites d'elles-mêmes par la position qu'on a donnée à l'origine ; ainsi on voit qu'il faut et il suffit, pour que l'équation soit de la forme $Mx^2 + Ny + P = 0$, que les axes de coordonnées soient deux diamètres conjugués.

Par ces conditions l'équation (1) devient

$$\text{(Y)} \quad y'^2\,(m\cos^2\alpha' - \sin^2\alpha') + x'^2\,(m\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{p^2}{m}.$$

Digitized by Google

Alors les carrés des deux demi-diamètres conjugués ont pour expression

$$A'^2 = \frac{p^2}{m(m\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}, \qquad B'^2 = \frac{p^2}{m(m\cos^2\alpha' - \sin^2\alpha')}.$$

Remplaçons dans l'équation (Y), les coefficients des ordonnées par leurs valeurs en fonction des demi-diamètres conjugués, on a

$$y'^2\frac{p^2}{mB'^2} + x'^2\frac{p^2}{mA'^2} = \frac{p^2}{m} \quad \text{ou} \quad A'^2y'^2 + B'^2x'^2 = A'^2B'^2.$$

100.—Dans l'hyperbole il n'y a qu'un des diamètres conjugués à couper la courbe; en effet, supposons $A'^2 > 0$, on va montrer que $B'^2 < 0$. On a

$$B'^2 = \frac{p^2}{m\cos^2\alpha'(m - \tang^2\alpha')},$$

et comme $\tang\alpha \tang\alpha' = m$, il s'ensuit que

$$B'^2 = \frac{p^2}{m\cos^2\alpha'\left(m - \dfrac{m^2}{\tang^2\alpha}\right)} = \frac{p^2\tang^2\alpha}{m^2\cos^2\alpha'(\tang^2\alpha - m)};$$

A'^2 a été trouvé égal à

$$\frac{p^2}{m(m\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = \frac{p^2}{m\cos^2\alpha(m - \tang^2\alpha)}.$$

Ainsi

$$B'^2 = \frac{p^2\tang^2\alpha}{m^2\cos^2\alpha'(\tang^2\alpha - m)}, \quad A'^2 = \frac{p^2}{m\cos^2\alpha(m - \tang^2\alpha)}.$$

On voit que si m est négatif, comme cela a lieu dans l'ellipse, A'^2, B'^2 sont tous deux positifs; si m est positif, ce qui est le cas de l'hyperbole, on voit que A'^2, B'^2 sont de signes contraires; donc si $A'^2 > 0$, $B'^2 < 0$, c'est-à-dire que l'axe des y ou le diamètre conjugué sur lequel sont comptées les ordonnées ne coupe pas la courbe.

Digitized by Google

Donc dans l'hyperbole il n'y a qu'un des diamètres conjugués à couper la courbe.

101.—Cherchons la condition à laquelle doivent satisfaire α, α' pour que les diamètres conjugués soient égaux ; en posant $A'^2 = B'^2$, il vient

$$\frac{p^2}{m(m\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = \frac{p^2}{m(\cos^2\alpha' m - \sin^2\alpha')},$$

ou

$$m\cos^2\alpha' - \sin^2\alpha' = m\cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

remplaçant $\sin^2\alpha$, $\sin^2\alpha'$ par $1 - \cos^2\alpha$, $1 - \cos^2\alpha'$, la dernière égalité se transforme en $\cos^2\alpha(1+m) = \cos^2\alpha'(1+m)$; donc $\cos^2\alpha = \cos^2\alpha'$, $\sin^2\alpha = \sin^2\alpha'$, puis enfin $\tang^2\alpha = \tang^2\alpha'$, ou $\tang\alpha = \pm\tang\alpha'$; mais la condition que les diamètres soient conjugués, donne $\tang\alpha\tang\alpha' = m$; or, dans l'ellipse $m = -\frac{b^2}{a^2}$, donc il faut prendre la valeur $\tang\alpha' = -\tang\alpha$; alors on a $\tang\alpha = \pm\frac{b}{a}$; la première valeur est pour l'un des diamètres, et la deuxième pour l'autre. Pour construire ces deux diamètres, il suffit de former le rectangle circonscrit à l'ellipse, ayant les axes pour côtés; ce qui se fait en tirant des parallèles aux axes par les quatre sommets M, N, P, Q; puis tirant les diagonales de ce rectangle, on a dans ces lignes les deux diamètres conjugués égaux de l'ellipse; car du triangle MAD on tire

Fig. 66.

$$MD = AM \times \tang MAD, \text{ d'où } \tang MAD = \frac{b}{a} = \tang\alpha.$$

L'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués égaux a pour équation $y'^2 + x'^2 = A'^2$; équation qui est la même que celle d'une circonférence quand les axes sont rectangulaires, et leur origine en son centre.

Dans l'hyperbole $m = \frac{b^2}{a^2}$, donc $\tang\alpha$, $\tang\alpha'$ doivent être de même signe, alors $\tang\alpha = \pm\frac{b}{a}$; ainsi dans cette courbe les deux diamètres égaux se réduisent à l'une des diagonales du rectangle formé sur les axes de la courbe.

Digitized by Google

Ier Théorème.

102.—On va démontrer que dans une courbe du second degré le ectangle construit sur les axes est équivalent au rectangle construit ır deux diamètres conjugués quelconques.

Des expressions des diamètres conjugués on tire l'égalité

$$A'^2B'^2 = \frac{p^4}{m^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(m\cos^2\alpha' - \sin^2\alpha')} =$$

$$= \frac{p^4}{m^2[m^2\cos^2\alpha\cos^2\alpha' + \sin^2\alpha\sin^2\alpha' - m(\cos^2\alpha\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha'\sin^2\alpha)]};$$

ıais de l'équation (U) on tire, en élevant ses deux membres au arré,

$$m^2\cos^2\alpha\cos^2\alpha' + \sin^2\alpha\sin^2\alpha' = 2m\cos\alpha\cos\alpha'\sin\alpha\sin\alpha';$$

emplaçant $m^2\cos^2\alpha\cos^2\alpha' + \sin^2\alpha\sin^2\alpha'$ par sa valeur dans l'ex-ression de $A'^2B'^2$, il vient

$$A'^2B'^2 = \frac{p^4}{m^2[-m(\cos^2\alpha\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha'\sin^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\alpha' \times \sin\alpha\sin\alpha')]}.$$

Or, on sait que $\sin(\alpha'-\alpha) = \sin\alpha'\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha'$, ce qui donne

$$\sin^2(\alpha'-\alpha) = \sin^2\alpha'\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha' - 2\cos\alpha\cos\alpha'\sin\alpha\sin\alpha',$$

lors la valeur de $A'^2B'^2$ devient

$$A'^2B'^2 = \frac{p^4}{-m^3\sin^2(\alpha'-\alpha)}, \quad \text{ou} \quad A'^2B'^2 \times \sin^2(\alpha'-\alpha) = \frac{p^4}{-m^3},$$

ou bien enfin

$$\sin(\alpha'-\alpha)\,A'B' = \frac{+1}{\sqrt{-m}} \times \frac{p^2}{m}.$$

On voit que $4A'B'\sin(\alpha'-\alpha)$ est la valeur du parallélogramme MNPQ, car il a pour expression $4AC \times HD$, mais $HD = AH \times \sin HAC = AH \times \sin HAC'$; les deux angles HAC, HAC' étant supplémentaires, leurs sinus sont égaux, donc $AH \times \sin HAC =$ Fig. 67.

Digitized by Google

$AH \times \sin HAC'$; en outre $HAC' = \alpha' - \alpha$, puis $AH = B'$. Donc enfin $AC \times HD = A'B' \sin(\alpha' - \alpha)$, par conséquent le parallélogramme MNPQ aura pour expression $4A'B' \sin(\alpha' - \alpha)$.

On est parvenu à l'égalité

$$\sin(\alpha' - \alpha)\, A'B' = \frac{+p^2}{\sqrt{-m \,.\, m}};$$

supposons que la courbe soit une ellipse,

$$m = -\frac{b^2}{a^2},\ p = \frac{b^2}{a},\ \text{alors } A'B' \sin(\alpha' - \alpha) = \frac{\frac{b^4}{a^2}}{\frac{b}{a}\,\frac{b^2}{a^2}} = a\,b,$$

ou $4A'B' \sin(\alpha' - \alpha) = 4ab$. Donc le rectangle construit sur deux diamètres conjugués est équivalent à celui construit sur les axes.

Si la courbe est une hyperbole $m = \frac{b^2}{a^2}$, $p = -\frac{b^2}{a}$; mais avant de faire la substitution des valeurs de m, p, il faut remarquer que le produit $A'^2B'^2$ est négatif, puisque l'un des axes est imaginaire, la courbe n'étant coupée que par l'un d'eux; par conséquent pour avoir l'expression de l'aire du parallélogramme construit sur ces deux diamètres conjugués, il faut changer le signe de la valeur de $A'^2\,B'^2$, alors il vient

$$A'B' \sin(\alpha' - \alpha) = \frac{p^2}{m^3} = ab.$$

Donc dans les courbes du second degré à centre le rectangle construit sur les axes est équivalent au parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques.

IIe Théorème.

103.—Dans les courbes du second degré à centre la somme algébrique des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est égale à celle des carrés des axes.

Dans l'ellipse les carrés des diamètres conjugués sont toujours positifs, puisque tous deux coupent la courbe; alors, d'après le théorème, on aura la relation $a^2 + b^2 = A'^2 + B'^2$. Dans l'hyper-

Digitized by Google

ole, l'un des carrés étant négatif, on a $a^2 - b^2 = A'^2 - B'^2$; on trouvé

$$A'^2 = \frac{p^2}{m(m\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}, \quad (1) \qquad B'^2 = \frac{p^2}{m(m\cos^2\alpha' - \sin^2\alpha')}, \quad (2)$$

$$m^2\cos^2\alpha\cos^2\alpha' = \sin^2\alpha\sin^2\alpha'. \qquad (3)$$

Il faut éliminer α, α' entre les équations (1), (2), (3). L'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$m^2\cos^2\alpha\cos^2\alpha' = \sin^2\alpha\sin^2\alpha'.$$

De l'équation (1) on tire

$$\sin^2\alpha = \frac{m^2A'^2 - p^2}{mA'^2(1+m)}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{mA'^2 + p^2}{mA'^2(1+m)},$$

n se servant de la relation $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

On tire de même de l'équation (2)

$$\sin^2\alpha' = \frac{m^2B'^2 - p^2}{mB'^2(1+m)}, \qquad \cos^2\alpha' = \frac{mB'^2 + p^2}{mB'^2(1+m)},$$

substituant ces valeurs dans l'équation (3), il vient

$$m^2(mA'^2 + p^2)(mB'^2 + p^2) = (m^2B'^2 - p^2)(m^2A'^2 - p^2).$$

On peut mettre cette égalité, en développant chaque membre, sous la forme

$$m^2[m^2A'^2B'^2 + p^2m(A'^2 + B'^2) + p^4] = m^4A'^2B'^2 - p^2m^2(A'^2 + B'^2) + p^4.$$

Supprimant les termes communs aux deux membres et rapprochant les termes semblables, on a

$$m^2(A'^2 + B'^2)p^2(1+m) = p^4(1-m^2),$$

d'où on tire enfin

$$A'^2 + B'^2 = \frac{p^2(1-m^2)}{m^2(1+m)}.$$

Supposons que la courbe soit une ellipse, $m = -\frac{b^2}{a^2}$, $p = \frac{b^2}{a}$, alors la dernière égalité devient

Digitized by Google

$$A'^2+B'^2=\frac{\frac{b^4}{a^2}\left(\frac{a^4-b^4}{a^4}\right)}{\frac{b^4}{a^4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)}=\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}=\frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{a^2-b^2}=a^2+b^2$$

Donc $A'^2+B'^2=a^2+b^2$.

Dans l'hyperbole $m=\frac{b^2}{a^2}$, $p=-\frac{b^2}{a^2}$, alors on a

$$A'^2+B'^2=\frac{\frac{b^4}{a^2}\left(\frac{a^4-b^4}{a^4}\right)}{\frac{b^4}{a^4}\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)}=\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}=a^2-b^2;$$

la quantité B'^2 est négative si on prend pour axe des y celui qui ne coupe pas la courbe. Donc on a $A'^2-B'^2=a^2-b^2$.

Ainsi dans les courbes du second degré la somme algébrique des carrés des diamètres conjugués est égale à celle des carrés des axes.

On peut énoncer ce théorème pour chaque courbe en particulier, de la manière qui suit. Dans l'ellipse, la somme des carrés de deux diamètres conjugués est égale à celle des carrés des axes. Dans l'hyperbole la différence des carrés de deux diamètres conjugués est égale à la différence des carrés des axes.

104.—Des courbes du second degré rapportées à une tangente et au diamètre qui passe à son point de contact.

L'équation des courbes du second degré, rapportées à une tangente et au diamètre passant au point de contact, est de la forme $y^2=m'x^2+2p'x'$.

On démontrerait de la même manière que, lorsque les axes sont rectangulaires, pour tout point hors la courbe on a $y^2-m'x^2-2p'x>0$, puis ensuite que pour un point à l'intérieur de la courbe on a $y^2-m'x^2-2p'x<0$.

105.—L'équation d'une tangente à la courbe au point (x', y') est dans ce système de coordonnées $yy'=m'xx'+p'(x+x')$. De là on déduit que si par le point (x'', y'') on mène des tangentes à la courbe, la ligne qui passe par les points de contact a pour équation

$$(1) \qquad yy''=m'xx''+p'(x+x'').$$

Digitized by Google

Si dans l'équation (1) on fait $y = 0$, on en déduit $x = \frac{-px''}{m'x'' + p'}$. On voit que le point où cette ligne coupe l'axe des x est indépendant de l'ordonnée du point d'où partent les tangentes. Donc si par un point quelconque du plan on tire une série de sécantes, puis qu'aux points où elles coupent la courbe on mène des tangentes, ces tangentes vont se couper sur une ligne parallèle au diamètre conjugué de celui qui passe au point de concours des sécantes.

De ce théorème on déduit, que si le point donné est sur l'un des axes de la courbe le lieu d'intersection des tangentes menées aux points où les sécantes, partant du point fixe, coupe la courbe, sera une parallèle au second axe.

Ce théorème qui se démontre facilement par l'équation de la sécante passant par les points de contact des tangentes menées d'un point extérieur à la courbe, peut se démontrer directement.

Théorème.

106.—Par un point du plan on mène plusieurs sécantes, aux points où chacune d'elles coupe la courbe on tire les tangentes à une courbe du second degré; démontrer que toutes ces tangentes se coupent sur une ligne droite parallèle au diamètre conjugué de celui qui passe au point fixe. Soient α, β les coordonnées du point donné, l'équation d'une ligne quelconque passant par ce point est $y - \beta = A(x - \alpha)$; soient (x', y'), (x'', y'') les points où elle coupe la courbe, les tangentes en ces points ont pour équation

$$yy' = mxx' + p(x + x'), \quad yy'' = mxx'' + p(x + x'').$$

La question est maintenant ramenée à l'élimination des quantités A, x', y', x'', y'' entre les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6).

$$\begin{array}{ll}
(1) & yy' = mxx' + p(x + x'), \\
(2) & yy'' = mxx'' + p(x + x''), \\
(3) & y' - \beta = A(x' - \alpha), \\
(4) & y'' - \beta = A(x'' - \alpha), \\
(5) & y'^2 = mx'^2 + 2px', \\
(6) & y''^2 = mx''^2 + 2px''.
\end{array}$$

Les équations (1), (2) existant simultanément, expriment que x, y représentent les coordonnées du point d'intersection des tan-

Digitized by Google

gentes; les équations (3), (4) expriment que les points de contact sont sur la droite $y - \beta = A(x - \alpha)$; enfin les équations (5), (6) expriment que les points (x', y'), (x'', y'') sont sur la courbe. Ainsi, par la simultanéité de ces équations, toutes les conditions du problème sont exprimées, l'élimination entre elles des quantités A, x', y', x'', y'' produira une équation en x, y, qui sera le lieu démontrant le théorème énoncé.

107.—Cette méthode qui est la plus directe est fort longue; on peut en employer une seconde beaucoup plus courte.

Soit (x'', y'') le point d'intersection des deux tangentes; la sécante passant par leurs points de contact a pour équation

$$yy'' = mxx'' + p(x + x''),$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$y = \frac{mx'' + p}{y''}x + \frac{px''}{y''}.$$

L'équation de la droite passant par le point donné (α, β) est $y - \beta = A(x - \alpha)$.

Le point (x'', y'') doit être tel, que l'équation

$$y = \frac{mx'' + p}{y''}x + \frac{px''}{y''}$$

soit identique avec $y - \beta = A(x - \alpha)$. Condition qui donne les deux équations

$$(1) \qquad A = \frac{mx'' + p}{y''}, \qquad \beta - A\alpha = \frac{px''}{y''}. \qquad (2)$$

Éliminant entre ces deux équations A, l'équation en x'', y'' sera la relation qui doit exister entre x'', y'' pour que la ligne passant par les points de tangence passe au point donné.

De l'élimination de A entre (1), (2), il résulte

$$y'' = \frac{m\alpha + p}{\beta}x'' + \frac{p\alpha}{\beta};$$

équation qui est celle d'une droite quel que soit le point donné.

On va montrer qu'elle est parallèle au conjugué du diamètre

Digitized by Google

passant par le point donné (α, β). En effet, l'équation du diamètre passant par ce point est

$$y = \frac{\beta}{\alpha + \frac{p}{m}}\left(x + \frac{p}{m}\right) \quad \text{ou} \quad y = \frac{m\beta}{m\alpha + p}\left(x + \frac{p}{m}\right).$$

L'équation du conjugué sera

$$y = \frac{m\alpha + p}{\beta}\left(x + \frac{p}{m}\right),$$

à cause de la condition $\tang \alpha' \times \tang \alpha = m = \tang \alpha' \times \frac{m\beta}{m\alpha + p}$, qui donne $\tang \alpha' = \frac{m\alpha + p}{\beta}$.

Donc le lieu trouvé est parallèle au diamètre conjugué de celui passant par le point fixe. Le théorème se trouve ainsi démontré.

On va examiner les positions que prend cette droite suivant celles qu'on donne au point fixe.

108.—Supposons que le point donné soit sur l'axe des x ainsi que $\beta = 0$, l'équation du lieu devient $x = -\frac{p\alpha}{m\alpha + p}$, ce qui donne une ligne parallèle à l'axe des y; ce qu'on pouvait prévoir puisque cet axe est le conjugué de l'axe des x.

Si la courbe est une parabole et que le point donné soit sur son axe, il vient pour l'équation de la droite $x = -\alpha$. Donc dans une parabole, si par un point pris sur son axe on mène une série de sécantes, et qu'aux points où elles coupent la courbe on mène des tangentes, ces lignes se coupent sur une parallèle à l'axe des y, tellement située que l'axe des y est à égale distance du point fixe et de cette droite. On conclut de là que si le point donné est le foyer, le lieu résultant est la directrice; une pareille conclusion s'applique à toutes les courbes du second degré.

109.—En effet, les coordonnées des foyers sont

$$y = 0, \quad x = \frac{p}{1 \pm \sqrt{1 + m}};$$

en conséquence faisons, dans l'équation du lieu,

Digitized by Google

$$\beta = 0, \quad \alpha = \frac{p}{1 \pm \sqrt{1+m}},$$

il vient

$$x = \frac{\dfrac{-p^2}{1 \pm \sqrt{1+m}}}{\dfrac{mp}{1 \pm \sqrt{1+m}} + p} = \frac{-p^2}{mp + p \pm p\sqrt{1+m}} =$$

$$= \frac{-p^2}{p(1+m) \pm p\sqrt{1+m}} = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+m}\,(1 \pm \sqrt{1+m})}.$$

Ainsi l'équation du lieu est

$$x = -\frac{p}{\pm\sqrt{1+m}\,(1 \pm \sqrt{1+m})},$$

équation qui est celle des directrices. Donc si par le foyer dans une courbe du second degré on mène des sécantes, et qu'aux points où elles coupent la courbe on tire des tangentes, ces lignes vont se couper sur les directrices.

110.—Supposons que le point fixe soit l'un des sommets de la courbe, c'est-à-dire l'origine des coordonnées, le lieu qu'on doit trouver est l'axe des y, puisque cette ligne est une tangente fixe, les sécantes passant toutes au sommet.

Si dans l'équation $y = \frac{m\alpha + p}{\beta} x + \frac{p\alpha}{\beta}$ on fait $\alpha = 0$, $\beta = 0$, il vient $px = 0$, ou $x = 0$, c'est-à-dire que le lieu est l'axe des y.

111.—Prenons le deuxième sommet pour point fixe, $\alpha = -\frac{2p}{m}$, $\beta = 0$, on a dans ce cas

$$x = \frac{+2p^2 \frac{1}{m}}{-p} = \frac{-2p}{m};$$

le lieu est une ligne parallèle à l'axe des y passant au second sommet, ce qui devait être pour la même raison que ci-dessus.

Enfin prenons le cas où toutes les sécantes passent au centre,

$$\beta = 0, \quad \alpha = -\frac{p}{m}, \text{ on a } x = \frac{+\frac{p^2}{m}}{-p+p} = \infty.$$

Digitized by Google

On voit que le lieu est une ligne parallèle à l'axe des y située à l'infini; on pouvait le prévoir, car on sait que les tangentes à l'extrémité d'un diamètre sont parallèles. L'expression $x = \frac{-p\alpha}{m\alpha + p}$ peut se mettre sous une forme telle, qu'on puisse voir que plus le point fixe situé sur l'axe des x se rapproche du centre, plus le lieu d'intersection des tangentes s'éloigne du sommet; car posons $\alpha = -\frac{p}{m} - K$; lorsque $K = 0$, $\alpha = -\frac{p}{m}$; le point sera au centre; remplaçons α par sa valeur, il vient

$$x = \frac{+\frac{p^2}{m} + pK}{-p + mK + p} = \frac{p(mK + p)}{m^2 K} = \frac{p\left(m + \frac{p}{K}\right)}{m^2}.$$

Ainsi pour $\beta = 0$, $\alpha = -\frac{p}{m} - K$, on voit que l'équation du lieu est

$$x = \frac{p\left(m + \frac{p}{K}\right)}{m^2};$$

plus K ira en diminuant, plus x croîtra, plus la droite s'éloignera du sommet et plus le point fixe s'approchera du centre; enfin pour $K = 0$, $x = \infty$, c'est-à-dire que les tangentes sont parallèles. Ce résultat pourrait servir à prouver que les tangentes aux extrémités d'un diamètre sont parallèles, si on ne l'avait pas antérieurement démontré.

Problèmes.

112.—Sur les courbes du second degré il y a des problèmes qu'il est utile de résoudre, à cause des propriétés qu'ils font découvrir.

I.

Trouver le lieu des points tels qu'en menant des tangentes à une courbe du second degré, ces tangentes se coupent sous un angle donné.

Soit (x', y') un des points du lieu, les équations des tangentes partant de ce point seront de la forme

$$y - y' = A(x - x'), \quad y - y' = A'(x - x').$$

Digitized by Google

La condition pour qu'une ligne soit tangente est $m\beta^2 - 2p\beta\alpha + p^2 = 0$, $y = \alpha x + \beta$ étant l'équation de la droite ; en conséquence, pour exprimer que la droite $y - y' = A(x - x')$ est tangente, il suffit dans l'équation de tangence de remplacer α par A, et β par $y' - Ax'$; on a alors l'équation

$$(1) \qquad m(y' - Ax')^2 - 2p(y' - Ax')A + p^2 = 0.$$

Les deux valeurs de A déterminent les deux tangentes qu'on peut mener du point (x', y').

L'angle des deux droites $y - y' = A(x - x')$ et $y - y' = A'(x - x')$ a pour tangente $\frac{A - A'}{1 + AA'}$; si donc on désigne par P la tangente de l'angle donné, on a pour seconde condition que doivent remplir les tangentes, l'équation

$$(2) \qquad P = \frac{A - A'}{1 + AA'}.$$

Les quantités A, A' devant être les racines de l'équation (1), il s'ensuit qu'on a une équation de condition de plus, qui va permettre d'éliminer A, A', et d'avoir par suite le lieu demandé.

Ordonnons l'équation (1) par rapport à A, il vient

$$A^2(mx'^2 + 2px') - 2Ay'(mx' + p) + my'^2 + p^2 = 0.$$

Dans une équation du deuxième degré, on sait que A, A' étant les deux racines,

$$AA' = \frac{my'^2 + p^2}{mx'^2 + 2px'}, \quad A + A' = \frac{2y'(mx' + p)}{mx'^2 + 2px'},$$

de ces deux égalités il faut déduire $A - A'$.

Pour simplifier posons momentanément $A + A' = M$, et $AA' = Q$, élevons les deux membres de la première égalité aux carrés, et retranchons-en membres à membres la deuxième égalité $4AA' = 4Q$, on a

$$A^2 + A'^2 + 2AA' - 4AA' = M^2 - 4Q, \text{ ou } (A - A')^2 = M^2 - 4Q,$$

par conséquent l'équation du lieu cherché est

Digitized by Google

$$(3) \qquad P = \frac{\sqrt{M^2 - 4Q}}{1+Q}, \text{ ou } P^2(1+Q)^2 = M^2 - 4Q;$$

remplacant M, Q par leurs valeurs, l'équation (3) devient

$$P^2\left[1 + \frac{(my'^2 + p^2)}{(mx'^2 + 2px')}\right]^2 = \frac{4y'^2(mx' + p)^2}{(mx'^2 + 2px')^2} - 4\frac{my'^2 + p^2}{mx'^2 + 2px'};$$

réduisant tous les termes au même dénominateur, et simplifiant ensuite, il vient

$$m(y'^2 + x'^2) + 2px' + p^2 = \frac{2p}{P}\sqrt{y'^2 - mx'^2 - 2px'}. \qquad (4)$$

On voit que l'équation est du quatrième degré, puis ensuite, pour que le lieu existe, il faut que $y'^2 - mx'^2 - 2px'$ soit plus grand que zéro, donc tous les points du lieu demandé sont hors la courbe; résultat connu à priori.

113.—Supposons que la courbe soit une parabole, alors $m = 0$, l'équation du lieu est

$$p^2(p + 2x')^2 = \frac{4p^2}{P^2}(y'^2 - 2px'),$$

ou

$$y'^2 - P^2x'^2 - x'(2p + P^2p) - \frac{1}{4}P^2p^2 = 0.$$

Ainsi dans ce cas la courbe demandée ayant pour équation

$$y'^2 - P^2x'^2 - x'(2 + P^2)p - \frac{1}{4}P^2p^2 = 0,$$

est une hyperbole dont l'axe transverse est couché sur celui de la parabole; les coordonnées de son centre sont

$$y = 0, \; x = \frac{-p(2+P^2)}{2P^2}, \; y'^2 - P^2x'^2 - 2px'\left(1 + \frac{P^2}{2}\right) - \frac{P^2p^2}{4} = 0,$$

$$y = 0, \; x = -\frac{p}{P^2}\left(1 + \frac{P^2}{2}\right).$$

114.—Prenons le cas où l'on demande le lieu des points d'intersection des tangentes se coupant à angle droit.

Digitized by Google

Dans cette hypothèse $1 + AA' = 0$, donc $P = \infty$. L'équation du lieu se transforme alors en

$$y'^2 + x'^2 + \frac{2p}{m} + \frac{p^2}{m} = 0, \text{ car } \frac{p}{P} = 0,$$

et $y'^2 - mx'^2 + 2px'$ étant plus grand que zéro, il s'ensuit que le deuxième membre est nul.

$$y'^2 + x'^2 + \frac{2px}{m} = \frac{p^2}{m} = 0. \qquad (5)$$

L'équation (5) est celle d'une circonférence dont le centre est sur l'axe des x, et au centre de la courbe donné, vu que ses coordonnées sont $y = 0$, $x = -\frac{p}{m}$. Son rayon est

$$R = p\frac{\sqrt{1-m}}{m}.$$

Si la courbe est une parabole, le lieu a pour équation $x = -\frac{p}{2}$, c'est-à-dire qu'il est la directrice. Si la courbe est une ellipse, $m = -\frac{b^2}{a^2}$, $p = \frac{b^2}{a^2}$, le rayon de la circonférence est

$$R = \frac{b^2}{a}\frac{\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}}{\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Donc dans l'ellipse si on décrit du centre de la courbe une circonférence dont le rayon soit $\sqrt{a^2+b^2}$, tous les points de cette courbe seront tels que les tangentes menées de ces points à la courbe se couperont à angle droit.

Quand la courbe est une hyperbole, l'équation du lieu pouvant se mettre sous la forme

$$y^2 + \left(x + \frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2(1-m)}{m^2},$$

Digitized by Google

indique que le rayon de la circonférence est $\frac{p\sqrt{1-m}}{m}$; remplaçant m, p par leurs valeurs, cette expression devient

$$R^2 = \frac{\frac{b^4}{a^2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)}{\frac{b^4}{a^4}} = a^2 - b^2,$$

ainsi $R = \sqrt{a^2 - b^2}$. Donc, dans l'hyperbole, si des points de la circonférence décrite du centre de la courbe avec un rayon égal à $\sqrt{a^2-b^2}$, on mène des tangentes à cette courbe, elles sont perpendiculaires entre elles.

115.—Dans la parabole, le lieu jouissant de cette propriété est la directrice; connaissant dans l'ellipse la nature de ce lieu, on peut déduire celle de l'analogue dans la parabole, en considérant cette courbe comme la limite des ellipses qui ont un sommet et le foyer correspondant communs, mais dont les grands axes vont en croissant jusqu'à l'infini.

En effet, le point où la circonférence décrite du centre de l'ellipse avec $\sqrt{a^2+b^2}$ coupe l'axe des x, est distant de l'origine d'une quantité égale à $\sqrt{a^2+b^2} - a$; posons $d = -(\sqrt{a^2+b^2} - a)$, on va chercher ce que devient cette expression pour $a = \infty$, le foyer correspondant au sommet qui est l'origine des axes restant fixe. Pour introduire cette condition dans le calcul, posons $a - c = \frac{1}{2}p$, c étant égal à $\sqrt{a^2-b^2} = c$, alors $c^2 = a^2 - b^2 = a^2 + \frac{1}{4}p^2 - ap$; de là on tire $b^2 = p\left(a - \frac{1}{4}p\right)$; transportant cette valeur de b^2 dans celle de d, il vient

$$d = \frac{-p\left(a - \frac{1}{4}p\right)}{a + \sqrt{a^2 + p\left(a - \frac{1}{4}p\right)}},$$

car $d = -(\sqrt{a^2+b^2} - a)$ peut se mettre sous la forme

Digitized by Google

$$d = \frac{-b^2}{a + \sqrt{a^2 + b^2}};$$

divisant les deux termes de la valeur de α par a, on a

$$d = \frac{-p\left(1 - \frac{p}{4a}\right)}{1 + \sqrt{1 + p\left(\frac{1}{a} - \frac{p}{4a^2}\right)}}.$$

Faisant ensuite $a = \infty$, il devient en définitive $d = -\frac{p}{2}$.

La courbe par cette hypothèse se change en parabole, puis la circonférence se change en une parallèle à l'axe des y, vu que son centre est à l'infini sur l'axe des x, puis ensuite que son rayon

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + p\left(a + \frac{1}{4}p\right)}$$

devient infini pour $a = \infty$. Donc le lieu tel que si de ses points on mène des tangentes à une courbe du second degré, ces lignes se coupent à angle droit, est dans l'ellipse une circonférence dont le rayon est $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, et dont le centre est au même point que celui de la courbe; ce même lieu est dans l'hyperbole une circonférence dont $R = \sqrt{a^2 - b^2}$ est le rayon, et dont le centre est celui de la courbe; enfin dans la parabole le lieu est la directrice.

116.—La propriété qu'on vient de reconnaître par le calcul à la directrice dans la parabole peut se reconnaître par des considérations géométriques.

Fig. 68. En effet, soit HH′ la directrice, puis MP, MP′ les deux tangentes partant de cette directrice; soit F le foyer, tirons les lignes FP, FP′, puis les perpendiculaires PH, P′H′ sur la directrice, la ligne MF étant tracée; les triangles qu'on obtient MPH, MPF sont égaux, car PH = PF, puis les angles MPH, MPF sont égaux, parce qu'on sait que la tangente divise l'angle HPF en deux parties égales; en outre le côté MP est commun aux deux triangles, donc ces deux derniers sont égaux. Il résulte de là que PMF = PMH, et que MFP est droit; on démontrerait de même que P′MF = P′MH′, puis ensuite que MFP′ est droit; on a donc 180° (division sexagé-

Digitized by Google

simale) $= 2FMP + 2FMP'$, ou $FMP + FMP' = 90°$; donc l'angle des deux tangentes est droit. De ce que les angles en F sont droits, et qu'ils ont un côté commun MF, il en résulte que les lignes FP, FP' sont le prolongement l'une de l'autre. Donc, dans la parabole, la ligne qui contient les points de contact de deux tangentes partant de la directrice passe au foyer, puis en outre la ligne qui joint le point de concours des tangentes au foyer est perpendiculaire sur celle qui passe par leurs points de contact. Ces propriétés le calcul les avait démontrées.

II.

117.—Trouver dans l'ellipse le parallélogramme dont l'aire est un maximum. Fig. 72.

Soient ABCD un parallélogramme inscrit, et BH sa hauteur; sa surface que je désigne par S égalera $AD \times BH$. Prenons pour axes de coordonnées les diamètres parallèles aux côtés de ce quadrilatère; l'équation de la courbe rapportée à ces axes sera $a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$, puisque Oy, Ox sont 2 diamètres conjugués, $a' = OM$, $b' = OP$. Désignons les coordonnées du sommet B par x, y, on a alors

$$x = \frac{AD}{2}, \quad y = \frac{AB}{2};$$

si α représente l'angle BAH, on tire du triangle rectangle BAH, $BH = AB \times \sin\alpha$, substituant à AB sa valeur en fonction de y, il vient $BH = 2y \sin\alpha$; alors $S = AD \times 2y \sin\alpha = 4xy \sin\alpha$; mais x, y appartenant à un point de la courbe, on a $y = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - x^2}$; donc

$$S = 4x\frac{b'}{a'}\sin\alpha\sqrt{a'^2 - x^2} \text{ ou } \frac{S}{4} = K = \frac{b'}{a'}\sin\alpha x\sqrt{a'^2 - x^2}. \quad (1)$$

Telle est l'expression qu'il s'agit de rendre un maximum. Résolvons l'équation (1) par rapport à x, il vient

$$x^2 = \frac{a'^2b'^2\sin\alpha \pm \sin\alpha a'b'\sqrt{a'^2b'^2\sin^2\alpha - 4K^2}}{2b^2\sin^2\alpha}. \quad (2)$$

On voit qu'il faut pour que x^2 soit réel que $a'^2b'^2\sin^2\alpha > 4K^2$,

Digitized by Google

d'où l'on tire pour valeur maximum de K, $K = \frac{a'b' \sin \alpha}{2}$, et par suite $S = 2a'b' \sin \alpha$.

Fig. 73. Ainsi deux diamètres conjugués étant donnés dans une ellipse, l'aire maximum du parallélogramme inscrit, dont les côtés sont parallèles à ces deux diamètres, a pour expression $S = 2a'b' \sin \alpha$. Les coordonnées d'un des sommets sont

$$x = \frac{a'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{b'}{\sqrt{2}},$$

valeurs qu'on déduit de l'équation (2) et de celle de la courbe; construisons le parallélogramme circonscrit sur les deux diamètres MN, PQ, ses deux diagonales ac, bd ont pour équation

$$\frac{y}{x} = \frac{b'}{a'} \quad \text{ou} \quad y = \frac{b'}{a'} x,$$

ce qui montre que les sommets du parallélogramme inscrit maximum sont sur les diagonales du parallélogramme construit sur les deux diamètres a', b'.

Désignons par S' l'aire du parallélogramme $abcd$, on a

$$S' = 4a'b' \sin \alpha, \text{ donc } \frac{S'}{S} = \frac{4a'b' \sin \alpha}{2a'b' \sin \alpha} = 2.$$

Donc quels que soient deux diamètres conjugués, si on construit le parallélogramme circonscrit à l'ellipse ayant pour côtés ces deux diamètres, et qu'on en tire les diagonales, ces lignes vont couper la courbe en quatre points qui, joints deux à deux, forment un parallélogramme inscrit dont les côtés sont parallèles aux diamètres en question, jouissant de la propriété d'avoir la surface la plus grande de tous les parallélogrammes inscrits dans l'ellipse, ayant leurs côtés parallèles aux diamètres dont il s'agit; en outre sa surface est moitié de celle du parallélogramme circonscrit correspondant.

Les points G, G', G'', G''' où les diamètres conjugués coupent le parallélogramme maximum ABCD, jouissent d'une propriété assez remarquable consistant en la suivante : si sur $ON = a'$ comme diamètre on décrit un circonférence, puis qu'au milieu I de ON on élève à cette dernière ligne la perpendiculaire IE, le point E où

Digitized by Google

elle coupe la circonférence est sur un arc décrit du point O comme centre avec OG pour rayon ; en effet, du triangle rectangle OEN on tire

$$2\overline{OE}^2 = a'^2 \text{ ; donc } OE = \frac{a'}{\sqrt{2}},$$

valeur qu'on a trouvée être celle de OG. Si sur le demi-diamètre OQ on décrit une demi-circonférence, et qu'on élève en son milieu la perpendiculaire l'E', E' étant sur la circonférence, les points G', E' sont sur un même arc de cercle décrit du point O comme centre avec OE' pour rayon ; car

$$2\overline{OE'}^2 = b'^2, \quad OE' = \frac{b'}{\sqrt{2}} = OG'.$$

Cette propriété peut servir à construire le parallélogramme ABCD, si on ignore la méthode pour mener les tangentes en M, P, N, Q, qui déterminent les diagonales du parallélogramme ABCD. Reprenons l'expression $K = 2a'b' \sin\alpha$, on sait que $a'b' = ab$, a et b désignant les demi-axes de la courbe, alors $K = 2ab \sin\alpha$; pour que K soit un maximum on voit qu'il faut que $\sin\alpha = 1$; c'est-à-dire $\alpha = 90°$. Donc, le parallélogramme inscrit dans l'ellipse qui est un maximum absolu, est le rectangle inscrit dont les diagonales sont sur celles du rectangle circonscrit.

De ce que $\alpha = 90°$, il s'ensuit que $a' = a$, $b' = b$, car α désigne l'angle des deux diamètres conjugués. Alors Fig. 74.

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}};$$

ce qui donne pour les équations des diagonales du rectangle maximum

$$y = \frac{b}{a}x, \; y = -\frac{b}{a}x, \text{ donc } \tang\alpha \times \tang\alpha' = -\frac{b^2}{a^2},$$

ainsi ces diagonales sont deux diamètres conjugués ; désignons-les par a', b', on a

Digitized by Google

$$\overline{OA}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{AF}^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{a^2+b^2}{2} = \overline{OB}^2;$$

on trouverait de même que $\overline{OB}^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$, donc OA = OB. Donc ces diamètres conjugués sont égaux.

Donc, dans l'ellipse, les diagonales du parallélogramme inscrit maximum sont les deux diamètres conjugués égaux, et se confondent avec les diagonales du rectangle circonscrit.

Supposons que $a = b = R$, l'ellipse devient une circonférence, alors

$$S = 2R^2, \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}} = y = \frac{R}{2},$$

on voit que dans la circonférence le parallélogramme inscrit maximum est le carré inscrit.

De la circonférence.

118. — La circonférence est une courbe plane dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur qu'on nomme centre. D'après cette définition on va chercher quelle est son équation générale.

Fig. 75. Soit OA le rayon d'un circonférence que l'on désigne par R, soient Px, Py les axes de coordonnées et MB, MC les ordonnées d'un point quelconque de la courbe; désignons par a, b celles du centre, et enfin par θ l'angle xPy; en tirant la ligne OH parallèle à Px, on forme le triangle MOH, d'où on tire

$$\overline{OM}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{MH}^2 - 2OH.MH.\cos OHM.$$

Mais

$$OM = R, \quad MH = MB - OD = y - b, \quad OH = PB - DB = x - a,$$
$$OHM = 180 - \theta, \quad \text{donc} \quad \cos OHM = -\cos\theta;$$

substituant à la place de OM, MH, OH, cos OHM leur valeurs, il vient

$$R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\theta.$$

Digitized by Google

Effectuant les calculs indiqués, puis ordonnant par rapport aux variables x et y, il vient

$$2xy\cos\theta + x^2 + y^2 - x(2a + 2b\cos\theta) - y(2b + 2a\cos\theta) + \\ + a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - R^2 = 0,$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2x(a + b\cos\theta) - 2y(b + a\cos\theta) + \\ + a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - R^2 = 0. \qquad (1)$$

On voit que la circonférence, en coordonnées obliques, a une équation remarquable par sa forme : car les coefficients des carrés des variables sont égaux, celui du rectangle des variables est le double du cosinus de l'angle des axes, celui de x au premier degré est le double de la distance à l'origine des axes du pied de la perpendiculaire à l'axe des x, prise en signe contraire. Car, soit OQ cette distance, on a

$$PQ = PD + DQ = a + DQ,$$

or, du triangle rectangle ODQ, on tire

$$DQ = OD\cos\theta = b\cos\theta, \quad \text{donc} \quad PQ = a + b\cos\theta.$$

Le coefficient de y à la première puissance est le double de la distance du pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur l'axe des y à l'origine P prise en signe contraire. Car

$$PQ' = PD' + D'Q' = b + OD'\cos\theta = b + a\cos\theta;$$

enfin le terme constant est la différence entre le carré du rayon de la circonférence et le carré de la distance de son centre à l'origine, car du triangle OPD on tire

$$\overline{OP}^2 = \overline{PD}^2 + \overline{OD}^2 - 2\cos PDO \times PD \times OD = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta;$$

donc, le terme constant est $OP^2 - R^2$.

119. — Cette forme dans les coefficients de l'équation de la circonférence rapportée à des coordonnées obliques, permet de trouver la position du centre par rapport aux axes de coordonnées, ainsi que son rayon. En effet, soit

Digitized by Google

$$x^2+y^2-2xy\cos\theta+mx+ny+p=0$$

l'équation d'une circonférence; pour que cette courbe soit connue, il faut connaître la position de son centre relativement à deux axes fixes et son rayon; pour cela, désignons par a, b, R, les quantités inconnues. L'équation donnée représentant une circonférence, doit être de la forme

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta-2x(a+b\cos\theta)-2y(b+a\cos\theta)+$$
$$+a^2+b^2+2ab\cos\theta-R^2=0;$$

comme elle doit être d'un autre côté identique à l'équation proposée, il s'ensuit qu'on a les équations suivantes :

$$\text{(X)}\qquad -\frac{m}{2}=a+b\cos\theta,$$

$$\text{(Y)}\qquad -\frac{n}{2}=b+a\cos\theta,$$

$$\text{(Z)}\qquad +p=a^2+b^2+2ab\cos\theta-R^2.$$

Des équations (X) et (Y) on tire

$$a=\frac{n\cos\theta-m}{2\sin^2\theta},\quad b=\frac{m\cos\theta-n}{2\sin^2\theta},$$

portant ces valeurs dans l'équation (Z), il vient

$$R^2=\frac{n^2\cos^2\theta+m^2+m^2\cos^2\theta+n^2-4mn\cos\theta}{4\sin^4\theta}+$$
$$+\frac{2\cos\theta(mn\cos^2\theta+mn-n^2\cos\theta-m^2\cos\theta)}{4\sin^4\theta}-p.$$

Simplifiant, la valeur de R^2 devient

$$R^2=\frac{-n^2\cos^2\theta-m^2\cos^2\theta+m^2+n^2-2mn\cos\theta+2mn\cos^3\theta}{4\sin^4\theta}-p.$$

Cette valeur peut encore se simplifier en remarquant que

$$m^2-m^2\cos^2\theta=m^2\sin^2\theta,\ n^2-n^2\cos^2\theta=n^2\sin^2\theta,\ -2mn\cos\theta+$$
$$+2mn\cos^2\theta=-2mn\cos\theta(1-\cos^2\theta)=-2mn\sin^2\theta\cos\theta;$$

Digitized by Google

substituant ces expressions dans R^2, on a

$$R^2 = \frac{\sin^2\theta\,(m^2+n^2-2mn\cos\theta)}{4\sin^4\theta} - p = \frac{m^2+n^2-2mn\cos\theta}{4\sin^2\theta} - p,$$

d'où

$$R = \frac{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\theta-4\sin^2\theta p}}{2\sin\theta}.$$

Ainsi les coordonnées du centre sont trouvées, de même que le rayon, en conséquence tout est déterminé; on voit d'après cela que trois conditions sont nécessaires et suffisantes pour déterminer une circonférence. Donc par trois points non en ligne droite on peut faire passer une circonférence, mais une seule.

Pour construire les valeurs de a et b, il faut procéder de la manière suivante; soient Oy, Ox les axes de coordonnées faisant l'angle θ, prenons sur Oy, $OQ = -\frac{n}{2}$, puis sur Ox, $OQ' = -\frac{m}{2}$, et élevons en ces points des perpendiculaires à Oy, Ox, elles vont se couper en un point A duquel on mène les parallèles AR, AR′ aux axes; posons $AR = a$, $AR' = b$, il vient Fig. 76.

$$OQ = b + RQ = b + a\cos\theta = -\frac{n}{2},$$

$$OQ' = -\frac{m}{2} = a + R'Q' = a + b\cos\theta;$$

ainsi, de la construction, on déduit les deux équations

$$-\frac{m}{2} = a + b\cos\theta, \quad -\frac{n}{2} = b + a\cos\theta,$$

qui sont identiques à (X) et (Y); donc a, b qui représentent les coordonnées du centre sont données sur la figure par AR et AR′. Donc le point A est le centre de la circonférence dont

$$x^2 + 2xy\cos\theta + mx + ny + p = 0$$

est l'équation.

D'après l'équation (Z), on a $R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - p$, mais $a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta = \overline{OA}^2$, puisqu'on a prouvé que a, b étaient

Digitized by Google

égaux à AR, AR'; alors pour avoir R il suffit de décrire sur OA comme diamètre une demi-circonférence, puis de tirer la corde $OH = \sqrt{p}$; et en joignant H à A, on a dans AH le rayon de la circonférence, car du triangle rectangle OHA on tire

$$\overline{AH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OH}^2 = (a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - p).$$

Ainsi tous les éléments de la circonférence dont

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + mx + ny + p = 0$$

est l'équation, sont connus. Par la construction, on voit que pour que l'équation représente une circonférence, il faut que $\sqrt{p}$ soit $<$ que $\sqrt{a^2 b^2 + 2ab\cos\theta}$ ou $\sqrt{p} < OA$.

120.—Supposons les axes rectangulaires, alors $\cos\theta = 0$. Par conséquent l'équation générale devient

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by - R^2 = 0.$$

Ainsi l'équation de la circonférence rapportée à des axes rectangulaires ne contient point le rectangle des variables, en outre les coefficients des deuxièmes puissances de ces variables sont égaux, s'ils sont l'unité; les coefficients des premières puissances de x et de y pris en signe contraire sont le double des coordonnées du centre.

Réciproquement toutes les fois que les secondes puissances des variables ont des coefficients égaux, la courbe représentée est une circonférence. En effet, soit $Ay^2 + Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$; cette équation peut se mettre sous la forme

$$x^2 + y^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A} = 0.$$

Ajoutant aux deux membres de l'équation $\frac{C^2}{4A^2} + \frac{D^2}{4A^2}$, il vient

$$\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 + \frac{E}{A} - \frac{C^2 + D^2}{4A^2} = 0,$$

équation qui, comparée à $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$, montre qu'elle représente une circonférence dont les coordonnées du

Digitized by Google

centre sont $-\frac{C}{2A}$, $-\frac{D}{2A}$ et le rayon $R=\sqrt{E-\frac{D^2+C^2}{4A^2}}$.

Supposons $a=0$, dans l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, il vient

$$x^2+(y-b)^2=R^2.$$

La circonférence a son centre sur l'axe des y. Si on eût fait $b=0$, l'équation eût été $(x-a)^2+y^2=R^2$, dans ce cas le centre est sur l'axe des x; cette dernière équation peut se mettre sous la forme $y^2=-x^2+2ax+R^2-a^2$, on voit que c'est l'équation de l'ellipse

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(-x^2+2ax)+b^2-\frac{b^2}{a^2}\alpha^2$$

dans laquelle on a fait $b=a$. Donc la circonférence est une ellipse dont les axes sont égaux.

Supposons $a=R$, l'équation $y^2+(x-a)^2-R^2=0$ devient $y^2=-x^2+2ax$; on peut la déduire de l'équation générale $y^2=mx^2+2px$ en y faisant $m=-1$.

Considérons enfin l'hypothèse $a=0$, $b=0$, l'équation de la circonférence est alors $x^2+y^2=R^2$; de là on déduit que l'équation la plus simple de la circonférence en coordonnées orthogonales est $x^2+y^2=R^2$, cas où les axes sont rectangulaires et leur origine au centre de la courbe.

121.—En résumé, les diverses formes que peut prendre l'équation de la circonférence sont 1° en coordonnées obliques :

(1) $x^2+y^2+2xy\cos\theta-2x(a+b\cos\theta)-2y(b+a\cos\theta)+$
$+a^2+b^2+2ab\cos\theta-R^2=0$, Fig. 77.

(2) $x^2+y^2+2xy\cos\theta-2x(a+b\cos\theta)=0$, Fig. 78.

(3) $x^2+y^2+2xy\cos\theta-2ax-2a\cos\theta y+a^2-R^2=0$, Fig. 79.

(4) $x^2+y^2+2xy\cos\theta-2by-2b\cos\theta x+b^2-R^2=0$, Fig. 80.

(5) $x^2+y^2+2xy\cos\theta-R^2=0$. Fig. 81.

dans l'équation (1) le centre de la courbe n'a point de position particulière sur le plan; dans l'équation (2) l'origine est sur la courbe. La 3e représente une circonférence dont le centre est sur l'axe des x; la 4e, une circonférence dont le centre est sur l'axe des y;

Digitized by Google

enfin la 5°, une circonférence dont le centre est à l'origine des axes.

2° En coordonnées rectangulaires :

Fig. 77 *bis*.	(1 *bis*.)	$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$,
Fig. 78 *bis*.	(2 *bis*.)	$x^2+y^2-2ax-2by=0$,
Fig. 79 *bis*.	(3 *bis*.)	$(x-a)^2+y^2-R^2=0$,
Fig. 80 *bis*.	(4 *bis*.)	$x^2+(y-b)^2-R^2=0$,
Fig. 81 *bis*.	(5 *bis*.)	$x^2+y^2-R^2=0$.

Dans les équations (1 *bis*), (2 *bis*), (3 *bis*), (4 *bis*), (5 *bis*), les axes étant rectangulaires, la courbe occupe les mêmes positions, relativement aux axes que dans les cinq premières, on voit combien un système d'axes convenablement choisi, simplifie l'équation d'une courbe, et par suite apporte de simplicité dans les calculs relatifs à la résolution d'un problème.

122. — De tout ce qui précède on conclut qu'il faut, pour que l'équation générale du second degré

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

représente une circonférence, que $B^2-4AC<0$, car cette courbe n'est qu'une ellipse particulière, ensuite que $A=C$; si les axes sont obliques il faut en outre que $\frac{B}{2A}<1$. Si les axes sont rectangulaires il faut que $B=0$.

Dans tous les cas, les conditions ci-dessus indiquées sont nécessaires, mais elles ne sont pas suffisantes, car il peut arriver que la courbe se réduise à son centre, comme le montrent les équations (1), (1 *bis*), quand $R=0$; il peut se faire encore que la courbe soit impossible si les équations donnent pour les coordonnées des valeurs imaginaires, ce qui a lieu lorsque dans ces équations à la place de $-R^2$, se trouve $+R^2$.

Théorèmes.

123. — On a prouvé au n° 13, que toute ordonnée perpendiculaire à un diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre.

De l'équation $y^2=R^2-x^2$, on déduit que tout diamètre divise

Digitized by Google

la circonférence en deux parties égales, puisqu'à une même abscisse correspondent deux ordonnées égales et de signe contraire.

Au n° 80, on a prouvé 1° que tous les angles inscrits dans le même segment sont égaux ; 2° que tout angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit.

On a prouvé au n° 21, que toutes les normales passent au centre. Il suit de là que si on joint le point de contact d'une tangente au centre, le rayon obtenu est la normale au point de contact. En conséquence, pour mener une tangente en un point donné sur la courbe, il suffit d'élever, en ce point, une perpendiculaire au rayon au point donné.

124. — Dans une circonférence toute corde est moyenne entre le diamètre qui passe à l'une de ses extrémités et sa projection sur ce diamètre.

En effet, l'équation de la circonférence rapportée à des axes rectangulaires et au diamètre BD passant par une des extrémités B de la corde AB est $x^2+y^2=R^2$. Du triangle rectangle BAC, on tire $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2=y^2+(R-x)^2$. Le point A étant sur la courbe, on a $y^2=R^2-x^2$ et en substituant à y^2 sa valeur dans l'égalité obtenue, il vient Fig. 82.

$$\overline{AB}^2=R^2+x^2-2Rx+R^2-x^2=2R^2-2Rx=2R(R-x),$$

or $R-x$ est la projection de la corde AB sur le diamètre BD. Donc, si dans une circonférence par l'extrémité d'un diamètre on mène une corde, cette ligne est proportionnelle entre le diamètre et sa projection sur ce diamètre.

125. — Si d'un point quelconque on tire une sécante terminée aux points où elle coupe la circonférence, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection est égal au produit analogue que donnerait une seconde sécante passant par ce point.

Soient OA le rayon de la circonférence et C le point fixe donné par lequel on fait passer la sécante quelconque CMN. Il faut prouver que $CM\times CN=CA\times CB$.

En effet prenons pour l'origine des coordonnées rectangulaires le point C et pour axe des abscisses le diamètre OC, l'équation de la circonférence est $y^2+(x-a)^2=R^2$, celle de la sécante CN est $y=\alpha x$. Des triangles rectangles CMP, CNQ, on déduit Fig. 83.

Digitized by Google

$$\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{MP}^2, \quad \overline{CN}^2 = \overline{CQ}^2 + \overline{NQ}^2;$$

si on désigne les coordonnées des points M, N par x', y', x'', y'' les égalités précédentes deviennent $\overline{CM}^2 = x'^2 + y'^2$, $\overline{CN}^2 = x''^2 + y''^2$. Les points M, N appartenant à la sécante CM, on a $y' = \alpha x'$, $y'' = \alpha x''$, en conséquence $\overline{CM}^2 = x'^2(1+\alpha^2)$, $\overline{CN}^2 = x''^2(1+\alpha^2)$, d'où $CM \times CN = x'x''(1+\alpha^2)$.

Pour avoir x', x'' éliminons y entre les équations

$$(1) \quad y = \alpha x, \qquad (2) \quad y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - R^2 = 0,$$

il vient

$$x^2(1+\alpha^2) - 2ax + a^2 - R^2 = 0 \text{ ou } x^2 - 2a\frac{1}{1+\alpha^2}x + \frac{a^2-R^2}{1+\alpha^2} = 0.$$

Dans toute équation du second degré ramenée à la forme $x^2 + px + q = 0$, le dernier terme est le produit des racines prises en signe contraire, alors on a $x'x'' = \frac{a^2-R^2}{1+\alpha^2}$, par conséquent

$$CM \times CN = a^2 - R^2 = (a+R)(a-R).$$

Donc le produit $CM \times CN$ est constant tant que a ne varie pas, c'est-à-dire pour une sécante quelconque passant au point C, ainsi $CM \times CN = CM' \times CN'$. La quantité $(a+R)(a-R) = CA \times CB$, ainsi $CM \times CN = CM' \times CN' = CA \times CB$. L'égalité $CM \times CN = CM' \times CN'$ donne la proportion $CN : CM' :: CN' : CM$. Donc si d'un point extérieur à la circonférence on mène deux sécantes, la sécante entière et sa partie extérieure sont réciproquement proportionnelles à la seconde sécante et sa partie extérieure.

Fig. 84. 126.—Supposons le point C à l'intérieur de la circonférence, on trouverait comme ci-dessus $x'x'' = \frac{a^2-R^2}{1+\alpha^2}$, mais comme $a < R$, $x'x''$ est négatif, alors pour qu'il puisse être substitué dans l'égalité $CM \times CN = x'x''(1+\alpha^2)$ il faut changer le signe, vu que le produit $CM \times CN$ est essentiellement positif. Donc $CM \times CN = R^2 - a^2 = (R+a)(R-a)$; ce qui prouve que si deux cordes se rencon-

Digitized by Google

trent dans une circonférence, elles se coupent en parties inversement proportionnelles.

127.—Considérons encore le cas où le point de concours est à l'extérieur, et supposons que la sécante CM′N′ devienne une tangente en R, alors CM′ = CN′ = CR. L'égalité à laquelle on est parvenu, CM × CN = CM′ × CN′ donne $\overline{CR}^2$ = CM × CN; c'est-à-dire que si d'un point hors d'une circonférence, on mène une tangente et une sécante terminées aux points où elles rencontrent la courbe, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure. Fig. 83.

128.—Mener une tangente d'un point extérieur.

On a vu qu'il y a deux méthodes à suivre pour mener une tangente à une courbe du second ordre d'un point extérieur; la première consiste à déterminer directement les points de contact, et la seconde à déterminer directement ces points par l'intersection de la courbe avec une droite ou une autre courbe du même genre que celle qui est donnée. On a vu que l'équation des courbes à centre rapportées à leurs axes est $y^2 = mx^2 + p$, et que celle de la tangente au point (x', y') est $yy' = mxx' + p$; en conséquence, si on fait $m = -1$, $p = R^2$ dans cette dernière équation, on a $yy' + xx' = R^2$ pour l'équation de la tangente à la circonférence au point (x', y') pris sur la courbe.

Supposons qu'il faille mener une tangente à la circonférence du point extérieur (x'', y''), l'équation de la sécante passant par les deux points de contact des tangentes est $yy'' + xx'' = R^2$. Donc si on fait exister les équations (1), (2) simultanément, les quantités x et y représentent les coordonnées des points de contact

$$(1) \qquad y^2 = R^2 - x^2, \qquad (2) \qquad yy'' = R^2 - xx''.$$

La droite $yy'' = R^2 - xx''$ pouvant facilement se construire, il s'ensuit qu'on obtient les deux points de contact immédiatement, et par suite les deux tangentes. La droite et la circonférence ne pouvant se couper qu'en deux points, on en conclut qu'on ne peut mener d'un point extérieur que deux tangentes à la courbe.

Retranchons les équations (1), (2) membre à membre, il vient $y^2 - yy'' = -x^2 + x''x$; ajoutant aux deux membres de cette dernière $\frac{x''^2 + y''^2}{4}$, on a

Digitized by Google

$$y^2 - yy'' + \frac{y''^2}{4} + x^2 - xx'' + \frac{x''^2}{4} = \frac{x''^2 + y''^2}{4},$$

équation qui revient à

$$(3) \qquad \left(y - \frac{y''}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{x''}{2}\right)^2 = \frac{x''^2 + y''^2}{4}.$$

On reconnaît que l'équation (3) est celle d'une circonférence dont le rayon est $R = \frac{1}{2}\sqrt{x''^2 + y''^2}$, et dont les coordonnées du centre sont $y = \frac{y''}{2}$, $x = \frac{x''}{2}$. L'équation (3) existant en même temps que l'équation (1) donne les points de contact des tangentes menées du point (x'', y'').

129.—Pour construire la circonférence que donne l'équation (3), joignons le point donné M au centre O de la circonférence, et sur OM comme diamètre décrivons une circonférence, cette courbe aura pour équation

Fig. 85.

$$\left(x - \frac{x''}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y''}{2}\right)^2 = \frac{x''^2 + y''^2}{4},$$

car le point N étant milieu de OM, les coordonnées seront les moitiés de celles du point M, c'est-à-dire $\frac{x''}{2}$, $\frac{y''}{2}$; en outre, du triangle rectangle NOQ on tire

$$\overline{ON}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{NQ}^2 = \frac{x''^2 + y''^2}{4}.$$

D'après cela les points d'intersection A, B des deux courbes sont les points de contact des tangentes, qui sont alors MA, MB. Si on joint les points A et B au centre, les angles OAM, OBM sont droits comme inscrits dans un demi-cercle, ce qui démontre encore que tout rayon aboutissant au point de contact d'une tangente est perpendiculaire sur cette ligne.

Le procédé que l'analyse vient de nous fournir n'est autre que celui donné dans la géométrie élémentaire pour mener une tangente d'un point extérieur à une circonférence.

Digitized by Google

Maintenant tirons la ligne AB, elle est perpendiculaire sur OM, car les triangles rectangles OAM, OBM étant égaux, il s'ensuit que MA = MB, et OA = OB. Donc la ligne AB est perpendiculaire sur OM et divisée par cette ligne en deux parties égales. Donc les tangentes menées d'un point extérieur à la circonférence sont égales, et la ligne qui joint leur point de départ au centre est perpendiculaire sur la ligne qui joint les points de contact, et la divise en deux parties égales.

130.—Reprenons l'équation (2) $yy'' + xx'' = R^2$, le point où cette ligne coupe l'axe des x a pour abscisse $x = \frac{R^2}{x''}$, ce qui donne le point M. Si par ce point on mène une sécante quelconque AB et qu'aux points A et B où elle coupe la circonférence on mène des tangentes, ces lignes vont se couper en un point dont l'abscisse est $x'' = \frac{R^2}{x} = \frac{R^2}{OM}$, c'est-à-dire sur une parallèle à l'axe des y dont l'équation est $x = \frac{R^2}{OM}$. Fig. 86.

Ce théorème résulte du théorème général démontré pour les courbes du second degré qui s'énonce ainsi :

Si par un point fixe on mène une suite de sécantes à une courbe du second degré et qu'aux points où elles coupent la courbe on mène des tangentes à cette courbe, ces lignes vont se couper sur une parallèle au diamètre conjugué de celui qui passe au point fixe. Dans la circonférence les diamètres conjugués étant rectangulaires, il s'ensuit que le lieu des points de concours des tangentes doit être perpendiculaire sur le diamètre passant au point fixe. C'est en effet ce qu'on a déduit de l'équation $yy'' + xx'' = R^2$.

131.—Nous allons maintenant chercher les points d'intersection de deux circonférences, et établir les conditions pour qu'elles se coupent ou pour qu'elles soient tangentes.

Soient A, A' leurs centres, prenons pour axes des coordonnées rectangulaires les lignes AA'x et Ay ; en outre désignons la distance des centres AA' par a, et les rayons par R et R'; les équations de ces circonférences seront Fig. 87.

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = R^2,$$
$$(2) \qquad (x - a)^2 + y^2 = R'^2.$$

Si on fait exister simultanément les équations (1), (2), les quan-

Digitized by Google

tités x et y seront les coordonnées des points d'intersection, de sorte qu'en résolvant on aura les lignes demandées. Retranchant de l'équation (2) l'équation (1), il vient

$$-2ax + a^2 = R'^2 - R^2,$$

d'où $x = \frac{R^2 - R'^2 + a^2}{2a}$; substituant cette valeur dans l'équation (1), on a pour les valeurs correspondantes de y,

$$y = \pm \frac{1}{2a} \sqrt{4a^2R^2 - (a^2 + R^2 - R'^2)^2}.$$

On voit que les deux équations n'ont que deux solutions; ce qui prouve que deux circonférences ne peuvent avoir plus de deux points communs, à moins cependant qu'elles ne se confondent. Les points d'intersection M, et M' ayant même abscisse et deux ordonnées égales et de signe contraire, il s'ensuit que la ligne MM' est perpendiculaire en son milieu sur la ligne des centres AA'. Donc lorsque deux circonférences se coupent, la ligne des centres est perpendiculaire sur la ligne qui joint leurs points d'intersection, et la divise en deux parties égales.

132.—Pour que les deux circonférences se coupent il faut que les valeurs de y soient réelles; afin d'examiner dans quel cas les valeurs de y ne sont point imaginaires, mettons y sous la forme suivante :

$$y = \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(2aR + a^2 + R^2 - R'^2)\ (2aR - a^2 - R^2 + R'^2)} =$$

$$= \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(a + R + R')(a + R - R')(R + R' - a)(a + R' - R)}.$$

L'origine des coordonnées peut toujours être placée de manière que la ligne des centres soit située du côté des abscisses positives; ainsi nous supposerons a positif, et $R > R'$ ou au moins égal à R'; d'après ces hypothèses les deux premiers facteurs $A + R + R'$ et $a + R - R'$ sont toujours positifs. Pour que y soit réel, il faut que la quantité sous le radical soit positive; elle ne peut l'être que dans les conditions suivantes :

Digitized by Google

$$a < R + R' \text{ et } R < a + R',$$

ou bien

$$a > R + R' \text{ et } R > a + R'.$$

Les deux dernières inégalités sont incompatibles; car $a > R + R'$ donne à fortiori $a > R$; d'un autre côté $R > a + R'$ donne $R > a$, donc il faudrait qu'en même temps a fût plus grand que R et plus petit que R, ce qui est impossible; ainsi les conditions pour que les deux circonférences se coupent, se réduisent aux deux premières inégalités.

Donc pour que deux circonférences se coupent, il faut que la distance des centres soit moindre que la somme des deux rayons, et que le grand rayon soit moindre que la somme faite du second rayon et de la ligne des centres; c'est-à-dire qu'il faut qu'avec la ligne des centres et les deux rayons on puisse former un triangle.

133.—Pour que les deux circonférences soient tangentes il faut que les deux valeurs de y se réduisent à une seule, ce qui ne peut avoir lieu que si la quantité sous le radical est nulle.

Les deux premiers facteurs étant essentiellement positifs, y ne peut être nul que dans les deux cas suivants:

$$R + R' - a = 0, \quad \text{d'où } a = R + R',$$

et

$$a + R' - R = 0, \quad \text{d'où } a = R - R'.$$

Donc pour que deux circonférences soient tangentes, il faut et il suffit que la distance des centres soit la somme des deux rayons ou leur différence. Dans les deux cas, le point de contact est sur la ligne des centres, et dans le premier, il est extérieur, et dans le second, il est intérieur.

Les valeurs de y seront imaginaires lorsque $a > R + R'$, car tous les facteurs, à l'exception du troisième qui est négatif, seront positifs; ou bien quand $R > a + R'$, car le quatrième facteur est le seul qui soit négatif.

Donc pour que deux circonférences ne se coupent pas, il faut que la ligne des centres soit plus grande que la somme des deux rayons, ou que le grand rayon soit plus grand que la somme du petit rayon et de la ligne des centres.

Supposons $R = R'$ et $a = 0$, les valeurs de x et de y deviennent

Digitized by Google

$\frac{0}{0}$, c'est-à-dire qu'elles sont indéterminées; et en effet les deux courbes, ayant même rayon et même centre, ont tous leurs points communs.

Des asymptotes.

134. — On appelle asymptote d'une courbe une ligne qui s'approche indéfiniment de cette courbe sans jamais la rencontrer.

Une courbe ayant pour équation $f(x, y) = 0$, pour qu'elle ait une ou plusieurs asymptotes, il faut que son équation puisse se mettre sous la forme $y = ax + b + V$, V étant une expression qui devient nulle pour x égal à l'infini; alors $y = ax + b$ est l'équation de l'asymptote. De l'équation $y = ax + b + V$, on tire

$$a = \frac{y}{x} - \frac{b + V}{x};$$

si on fait $x = \pm\infty$, V devient nul, alors il vient

$$a = \text{limite}\left(\frac{y}{x} - \frac{b}{\pm\infty}\right),$$

ce qui se réduit, b étant constant et fini, à $a = \text{limite}\left(\frac{y}{x}\right)$. De la même équation on tire $b = y - ax - V$; si on y fait $x = \pm\infty$, V est nul, donc $b = \text{limite}(y - ax)$; ainsi l'équation des asymptotes est $y = x \times \text{limite}\left(\frac{y}{x}\right) + \text{limite}(y - ax)$. Par cette méthode on ne peut pas obtenir celles qui sont parallèles à l'axe des y; pour qu'il y en ait, il faut que l'équation de la courbe puisse se mettre sous la forme $x = a'y + b' + V'$, V' devenant nul pour $y = \pm\infty$, après avoir convergé vers zéro à mesure que y augmentait; la même condition doit exister pour V. L'équation des asymptotes, qui est $x = a'y + b'$, donnera toutes les asymptotes de la courbe, à l'exception de celles qui sont parallèles à l'axe des x; ces dernières sont données par l'équation $y = ax + b$. En procédant

Digitized by Google

comme plus haut, on trouverait que $a' =$ limite $\left(\frac{x}{y}\right)$, puis ensuite que $b' =$ limite $(x - a'y)$ de sorte que l'équation $x = a'y + b'$ devient

$$x = y \times \lim.\left(\frac{x}{y}\right) + \lim.(x - a'y).$$

On doit remarquer que si la courbe n'a point d'asymptotes parallèles aux axes, les deux équations $y = ax + b$ et $x = a'y + b'$ doivent être identiques; en appliquant cette théorie aux courbes du second degré, on va voir que cela se vérifie.

Les courbes du second degré ont pour équation $y^2 = mx^2 + 2px$. On va chercher leurs asymptotes en appliquant la théorie exposée précédemment.

L'équation $y^2 = mx^2 + 2px$ revient à $y = \sqrt{mx^2 + 2px}$, alors

$$\frac{y}{x} = \sqrt{m + \frac{2p}{x}};$$

faisant $x = \pm\infty$, il vient $a = \sqrt{m}$. On a $b =$ limite $(y - ax) =$ limite $(\sqrt{mx^2 + 2px} \mp x\sqrt{m})$. L'expression $\sqrt{mx^2 + 2px} \mp x\sqrt{m}$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{mx^2 + 2px - x^2m}{\pm\sqrt{mx^2 + 2px} \pm x\sqrt{m}} = \frac{2px}{\pm\sqrt{mx^2 + 2px} \pm x\sqrt{m}};$$

divisant les deux termes par x, il vient

$$\frac{2p}{\pm\sqrt{m + \frac{2p}{x}} \pm \sqrt{m}}.$$

Alors

$$b = \text{limite}\left(\frac{2p}{\pm\sqrt{m + \frac{2p}{x}} \pm \sqrt{m}}\right) = \frac{p}{\pm\sqrt{m}}.$$

Ainsi l'équation des asymptotes des courbes du second degré, à

Digitized by Google

l'exception de celles qui peuvent être parallèles à l'axe des y, est

$$y = \pm x\sqrt{m} \pm \frac{p}{\sqrt{m}}.$$

Cherchons celles qui peuvent être parallèles à l'axe des y; elles sont comprises dans l'équation $x = a'y + b'$.

On a $a' =$ limite $\left(\frac{x}{y}\right)$, posons $\frac{x}{y} = u$; l'équation de la courbe pouvant se mettre sous la forme

$$1 = m\frac{x^2}{y^2} + 2p\frac{x}{y}\frac{1}{y},$$

revient à

$$1 = mu^2 + 2pu\frac{1}{y}, \quad \text{ou} \quad u^2 + \frac{2p}{my}u - \frac{1}{m} = 0;$$

de là on tire

$$u = -\frac{p}{my} \pm \sqrt{\frac{p^2}{m^2y^2} + \frac{1}{m}},$$

ainsi

$$a' = \text{limite}\left(-\frac{p}{my} \pm \sqrt{\frac{p^2}{m^2y^2} + \frac{1}{m}}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{m}}.$$

On voit que a' n'étant point nul, il n'y a point d'asymptotes parallèles à l'axe des y.

Cherchons la valeur de b', on a

$$b' = \text{limite}(x - a'y) = \text{limite}\left(-\frac{p}{m} \pm \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + \frac{y^2}{m}} \mp y\sqrt{\frac{1}{m}}\right) =$$

$$= \text{limite}\left(\frac{\frac{p^2}{m^2} + \frac{y^2}{m} - \frac{p^2}{m^2} - \frac{y^2}{m} \mp \frac{2px}{m\sqrt{m}}}{\pm\sqrt{\frac{p^2}{m^2} + \frac{y^2}{m}} \mp y\sqrt{\frac{1}{m}} + \frac{p}{m}}\right);$$

simplifiant, on a

Digitized by Google

$$b' = \text{limite}\left(\frac{\dfrac{-2py}{m\sqrt{m}}}{\sqrt{\dfrac{p^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{m}+\dfrac{p}{m}}\pm y\sqrt{\dfrac{1}{m}}}\right) =$$

$$= \text{limite}\,\frac{-\dfrac{2p}{m\sqrt{m}}}{\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{m^2y^2}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{p}{my}}\pm\sqrt{\dfrac{1}{m}}} = \frac{\dfrac{-2p}{m\sqrt{m}}}{\pm 2\sqrt{\dfrac{1}{m}}} = \mp\frac{p}{m}.$$

Ainsi l'équation des asymptotes est

$$x = \pm y\sqrt{\frac{1}{m}} \mp \frac{p}{m},$$

et qui, résolue par rapport à y, devient

$$y = \pm x\sqrt{m} \pm \frac{p}{\sqrt{m}};$$

équation identique à la précédente. Ainsi se vérifie ce qu'on avait annoncé plus haut.

135.—L'équation des asymptotes des courbes du second degré est $y = \pm x\sqrt{m} \pm \frac{p}{\sqrt{m}}$, si la courbe est une ellipse $m = -\frac{b^2}{a^2}$, donc $\sqrt{m}$ est imaginaire, ainsi l'ellipse n'a point d'asymptotes, ce qu'on devait prévoir puisque cette courbe est limitée de tous côtés. Si $m = 0$ la courbe est une parabole, alors $y = \pm\frac{p}{0}$, c'est-à-dire que cette courbe n'a point d'asymptotes, puisque ce sont deux droites parallèles à l'axe des x situées de chaque côté de cet axe à une distance infinie; enfin si la courbe est une hyperbole $m = \frac{b^2}{a^2}$, alors $y = \pm\frac{b}{a}x \pm b$, ce qui montre que la seule courbe du second degré à asymptotes est l'hyperbole; ces asymptotes sont au nombre de deux coupant l'axe des x au même point ayant pour

Digitized by Google

abscisse $x = -\frac{p}{m}$, d'où l'on conclut qu'elles passent toutes les deux au centre de la courbe. Si on fait $x = 0$ dans leur équation, on a $y = \pm \frac{p}{\sqrt{m}} = \pm b$, on voit par là quelles sont les diagonales du rectangle construit sur les deux axes, car sur l'axe des y est l'un des côtés ($2b$) ds ce rectangle.

Par la forme de l'équation $y = \pm x\sqrt{m} \pm \frac{p}{\sqrt{m}}$, on voit que l'axe transverse de l'hyperbole divise l'angle des asymptotes en deux parties égales, puis en outre que ces deux lignes font avec l'axe des x des angles supplémentaires, vu que les tangentes de ces angles sont égales et de signes contraires.

136.—Pour que les deux asymptotes soient perpendiculaires l'une sur l'autre, il faut que $(+\sqrt{m}) \times (-\sqrt{m}) = -1$, ce qui exige que $m = \frac{b^2}{a^2} = 1$, c'est-à-dire que l'hyperbole soit équilatère.

Donc pour que l'hyperbole ait deux asymptotes se coupant à angle droit, il faut qu'elle soit équilatère.

137.—On va démontrer que les asymptotes de l'hyperbole ne sont autre chose que des tangentes à la courbe dont les points de contact sont à l'infini.

L'équation d'une tangente est

$$yy' = mxx' + p(x + x') \quad \text{ou} \quad y = x\frac{mx' + p}{y'} + \frac{px'}{y'}.$$

Le point (x', y') étant sur la courbe, on a

$$y = x\frac{mx' + p}{\sqrt{mx'^2 + 2px'}} + \frac{px'}{\sqrt{mx'^2 + 2px'}} =$$

$$= x\frac{m + \frac{p}{x'}}{\sqrt{m + \frac{2p}{x'}}} + \frac{p}{\sqrt{m + \frac{2p}{x'}}}.$$

Supposons que le point de contact soit à l'infini, alors $x' = \infty$,

Digitized by Google

l'équation de la tangente devient $y = \sqrt{m} \cdot x + \frac{p}{\sqrt{m}}$; ce qui est l'équation des asymptotes. Ainsi l'asymptote de l'hyperbole est une tangente dont le point de contact est situé à l'infini.

138.—Toute ligne parallèle à une des asymptotes coupe la courbe en un seul point.

En effet, l'équation d'une sécante parallèle à une asymptote est $y = x\sqrt{m} + \beta$; cherchons les points où elle coupe la courbe, pour cela, dans l'équation $y^2 = mx^2 + 2px$, mettons pour y la valeur $x\sqrt{m} + \beta$, il vient $mx^2 + \beta^2 + 2\beta\sqrt{m}x = mx^2 + 2px$, d'où on tire $x\left(2p - 2\beta\sqrt{m}\right) = \beta^2$; ainsi x n'a qu'une seule valeur; donc l'ordonnée qui est donnée par l'équation $y = x\sqrt{m} + \beta$, en y mettant pour x la valeur $\frac{\beta^2}{2p - 2\beta\sqrt{m}}$, n'aura également qu'une valeur; donc toute droite parallèle à une asymptote ne coupe la courbe qu'en un seul point.

Si la courbe était une parabole $y^2 = 2px$, la condition pour qu'une ligne $y = \alpha x + \beta$ ne la coupe qu'en un point est $\alpha = 0$, c'est-à-dire qu'il faut que cette ligne soit un diamètre de la parabole; car en éliminant y entre $y^2 = 2px$ et $y = \alpha x + \beta$, l'équation résultante $\alpha^2 x^2 + 2x(\alpha\beta - p) + \beta^2 = 0$ ne peut avoir qu'une seule racine que quand $\alpha = 0$.

Dans le cas où la courbe est une ellipse; pour que $y = \alpha x + \beta$ ne la coupe qu'en un point il faut que l'équation

$$x^2(\alpha^2 - m) + 2x(\alpha\beta - p) + \beta^2 = 0$$

soit du premier degré, ce qui exige que $\alpha^2 = m$, or $m = -\frac{b^2}{a^2}$; donc il faudrait que $\alpha^2 = -\frac{b^2}{a^2}$, ce qui ne peut exister; donc l'ellipse est toujours coupée par une droite en deux points. Quand les deux points sont infiniment voisins l'un de l'autre, la sécante est alors tangente à la courbe.

139.—On va chercher quelle est la condition dans l'hyperbole pour qu'une ligne passant par son centre la rencontre.

L'équation d'une droite passant par son centre est $y = \alpha\left(x + \frac{p}{m}\right)$.

Digitized by Google

Mettant dans l'équation de la courbe à la place de y sa valeur $y = \alpha\left(x + \frac{p}{m}\right)$, il vient

$$\alpha^2\left(x^2 + \frac{p^2}{m^2} + \frac{2px}{m}\right) - mx^2 - 2px = 0$$

ou

$$x^2(\alpha^2 - m) + 2x\left(\frac{p\alpha^2}{m} - p\right) + \frac{p^2\alpha^2}{m^2} = 0.$$

Pour que cette droite coupe la courbe, il faut que cette dernière équation ait ses racines réelles, ce qui exige qu'on ait l'inégalité

$$\frac{p^2\alpha^4}{m^2} + p^2 - \frac{2p^2\alpha^2}{m} - \frac{p^2\alpha^4}{m^2} + \frac{p^2\alpha^2}{m} > 0,$$

qui se réduit à

$$p^2 - \frac{p^2\alpha^2}{m} > 0 \quad \text{ou} \quad p^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{m}\right) > 0.$$

Ainsi il faut pour que la droite coupe la courbe en deux parties qu'on ait $\alpha < \sqrt{m}$, c'est-à-dire qu'il faut que la ligne soit dans l'angle des deux asymptotes où passe l'axe transverse; si $\alpha > \sqrt{m}$ la droite ne coupe pas la courbe.

Donc toute ligne comprise dans l'angle des asymptotes où se trouve l'axe transverse coupe la courbe en deux points, et au contraire toute ligne comprise dans l'angle des asymptotes où passe le second axe ne coupe point la courbe.

140.—On a montré que de l'équation $y = \pm x\sqrt{m} \pm \frac{p}{\sqrt{m}}$, il résultait que les asymptotes sont les diagonales du rectangle construit sur les axes. On va maintenant faire voir que plus généralement les asymptotes sont les diagonales du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques.

L'équation des courbes du second degré rapportées à un diamètre et à la tangente à son extrémité est de la forme $y = m'x^2 + 2p'x'$, en appliquant la théorie des asymptotes à cette équation, on trouverait pour ces asymptotes l'équation $y = \pm x\sqrt{m'} \pm \frac{p'}{\sqrt{m'}}$; si on

Digitized by Google

fait $x=0$, on trouve $y=\pm\frac{p'}{\sqrt{m'}}$, or $m'=\frac{b'^2}{a'^2}$, $p'=\frac{b'^2}{a'}$, donc $y=\pm b'$, a', b' étant les demi-diamètres conjugués. Ainsi on voit que les deux asymptotes coupent les tangentes menées aux extrémités du diamètre pris pour axe des x de telle manière, que les parties de ces tangentes comprises entre les asymptotes ont leur point de contact pour milieu, et en outre que les parties de chacune d'elles comprises entre les asymptotes sont égales au diamètre conjugué de celui qui est pris pour axe des x; il résulte de là que si on joint les points K et K', K'' et K''', la figure KK'K''K''' est un parallélogramme, puisque KK'' et K'K''' sont parallèles et égales au diamètre conjugué MM'. Donc KK'K''K''' est le parallélogramme construit sur les deux diamètres conjugués AM et AN. Fig. 88.

Donc les diagonales des parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués quelconques sont les asymptotes de l'hyperbole.

Dans l'hyperbole les parties d'une sécante comprise entre la courbe et l'asymptote la plus voisine sont égales.

141.—On va prendre le cas où la sécante coupe une seule branche de l'hyperbole. Soit HH' cette sécante et soient I, I' les points où elle coupe la courbe, on va démontrer que IH = I'H'. En effet, prenons le milieu R de la sécante II', et tirons le diamètre passant par ce milieu, prenons-le pour axe des x, puis pour axe des y la tangente au point où il coupe la courbe; l'équation de la courbe rapportée à ces axes est $y^2=m'x^2+2p'x$, celle des asymptotes est Fig. 89.

$$y=\pm\sqrt{m'}\pm\frac{p'}{\sqrt{m'}}.$$

La longueur $IH=x\sqrt{m'}+\frac{p'}{\sqrt{m'}}-\sqrt{m'x'^2+2p'x}$,

car

$$RH=x\sqrt{m'}+\frac{p'}{\sqrt{m'}},\quad RI=\sqrt{m'x^2+2p'x},$$

par la nature de l'équation de la courbe RI = RI', puis par celles des asymptotes (CM', CM), RH' = RH, donc RH — RI = RH' — RI, c'est-à-dire que IH = IH'.

Supposons que la droite coupe les deux branches de la courbe,

Digitized by Google

soit II'', il faut prouver que IT = I''T''; en effet prenons le milieu de II'' et joignons-le au centre de la courbe, soit CK le diamètre obtenu et AC son conjugué, prenons pour axes des coordonnées le diamètre CA et la tangente Ay parallèle à CK; l'équation de la courbe est $y^2 = m'x^2 + 2p'x$.

Celle des asymptotes est

$$y = \pm x\sqrt{m'} \pm \frac{p'}{\sqrt{m'}}.$$

Résolvant ces équations par rapport à x, il vient

$$x = \left(-p' \pm \sqrt{p'^2 + m'y^2}\right)\frac{1}{m'}, \quad x = \frac{\pm y}{\sqrt{m'}} \mp \frac{p'}{m'}.$$

Alors

$$\mathrm{QI} = \frac{1}{m'}\left(-p' + \sqrt{p'^2 + m'y^2}\right), \quad \mathrm{QT} = \frac{y}{\sqrt{m'}} - \frac{p'}{m'}.$$

Donc

$$\mathrm{IT} = \frac{1}{m'}\left(-p'\sqrt{p'^2 + m'y^2}\right) - \frac{y}{\sqrt{m'}} + \frac{p'}{m'} = \frac{1}{m'}\sqrt{p'^2 + m'y^2} -$$

$$- \frac{y}{\sqrt{m'}} = \frac{\dfrac{p'^2}{m'^2}}{\dfrac{1}{m'}\sqrt{p^2 + m'y^2} + \dfrac{y}{\sqrt{m'}}} = \frac{p'^2}{\sqrt{p'^2 + m'y^2} + m'\sqrt{m'}y}.$$

On voit que cette différence est constante pour les points qui ont même ordonnée; or, les points I', I'' sont sur une parallèle à l'axe des x; donc leurs ordonnées sont égales, alors QI — QT = IT = QT' — QI'' = I''T'. Donc les parties d'une sécante comprises entre les asymptotes et les branches les plus voisines de la courbe sont égales.

142.—La partie d'une tangente quelconque comprise entre les asymptotes a son point de contact pour milieu.

Fig. 90. En effet, soit AM une tangente, puis soient CM, CM' les deux asymptotes, prenons les lignes AC, AM pour axes des coordonnées, l'équation de la courbe est $y^2 = m'x^2 + 2p'x$, celle des asymp-

Digitized by Google

totes est $y = \pm x\sqrt{m'} \pm \frac{p'}{\sqrt{m'}}$. Faisons $x = 0$ dans cette dernière, on en tire $y = \pm \frac{p'}{m'}$, or $AM = \frac{p'}{m'}$ et $AM' = -\frac{p'}{m'}$. Donc $AM = AM'$. Donc la partie d'une tangente comprise entre les asymptotes a pour milieu son point de contact.

143.—Connaissant un point de la courbe et les deux asymptotes, on peut obtenir autant de points de la courbe que l'on veut.

Car soient CM', CM' les deux asymptotes, puis H un point de la courbe, tirons par ce point une sécante quelconque IH', prenons à partir du point H' une longueur $H'I' = HI$, le point I' est un point de la courbe d'après cette propriété des asymptotes que les parties d'une sécante comprise entre elles et la courbe sont égales; tirant par le point I une seconde sécante HQ en prenant $HQ = H''Q'$, on a en Q' un deuxième point. Les sécantes HD, HE donnent les points R, S. En continuant ainsi on peut trouver autant de points qu'il en faut pour construire les deux branches de la courbe. Maintenant agissant par rapport à l'un des points trouvés comme on l'a fait relativement au point donné, on obtiendra encore une foule d'autres points.

144.—Dans une hyperbole le rectangle compris sous les distances d'un point de la courbe aux asymptotes, comptées suivant une sécante, est égal au carré construit sur le demi-diamètre conjugué parallèle à la sécante.

Ainsi on va prouver que $IH \times IH' = b'^2$, b' désignant le demi-diamètre conjugué parallèle à la sécante HH'. En effet, prenons pour axe des x le diamètre allant au milieu de la corde HH' et la tangente parallèle à cette corde. L'équation de la courbe est $y^2 = m'x^2 + 2p'x$, celle des asymptotes CM, CM' est Fig. 90.

$$y = \pm x\sqrt{m'} \pm \frac{p'}{\sqrt{m'}}.$$

On a

$$IH = x\sqrt{m'} + \frac{p'}{\sqrt{m'}} - \sqrt{mx'^2 + 2p'x},$$

puis

$$IH' = +x\sqrt{m'} + \frac{p'}{\sqrt{m'}} + \sqrt{m'x^2 + 2p'x};$$

Digitized by Google

donc

$$\mathrm{IH} \times \mathrm{IH}' = \left(x\sqrt{m'} + \frac{p'}{\sqrt{m'}} + \sqrt{mx'^2 + 2p'x}\right)\left(x\sqrt{m'} + \right.$$

$$\left. + \frac{p'}{\sqrt{m'}} - \sqrt{m'x^2 + 2p'x}\right) =$$

$$= m'x^2 + 2p'x + \frac{p'^2}{m} - m'x^2 - 2p'x = \frac{p'^2}{m'}.$$

Or $p' = \frac{-b^2}{a'}$, $m' = \frac{b'^2}{a'^2}$, donc $\frac{p'^2}{m'} = b'^2 = \mathrm{IH} \times \mathrm{IH}'$.

Il suit de là que $\mathrm{I'H} \times \mathrm{I'H'} = \mathrm{IH} \times \mathrm{IH}'$. Donc si on tire une sécante dans l'hyperbole, le rectangle compris sous les distances d'un point où cette ligne coupe la courbe aux deux asymptotes, ces distances étant comptées suivant cette sécante, est égal au carré du demi-diamètre conjugué parallèle à cette ligne.

Fig. 91. 145.—Dans l'hyperbole, si d'un point quelconque de la courbe on mène des parallèles aux deux asymptotes, le parallélogramme compris sous ces deux lignes et les asymptotes a une surface constante égale au huitième du rectangle compris sous les axes de la courbe.

En effet, soient MM', NN' les deux asymptotes, puis H le point donné, tirons les parallèles HP, et HQ aux asymptotes, il faut prouver que le parallélogramme a une surface constante. En effet, tirons la tangente KHK', le point H étant le milieu de KK', on a $\mathrm{HQ} = \frac{\mathrm{AK}}{2}$, $\mathrm{HP} = \frac{\mathrm{AK'}}{2}$, l'aire du triangle KAK' est le quart du parallélogramme compris sous les deux diamètres conjugués SS' et HH'; le triangle $\mathrm{AHP} = \frac{\mathrm{AHK}}{2}$ puisque ces deux triangles ont même hauteur et que l'un a une base moitié de l'autre; de même $\mathrm{AHQ} = \frac{\mathrm{AHK'}}{2}$. Donc $\mathrm{AQHP} = \frac{1}{2}\,\mathrm{KAK'}$; or KAK' est $\frac{1}{4}$ du parallélogramme construit sur les deux axes. Donc le parallélogramme AQHP est le huitième du rectangle compris sous les deux axes de la courbe. Soient a, b les deux demi-axes, on aura $\mathrm{AQHP} = \frac{ab}{2}$.

Il suit de cette propriété que si on prend les asymptotes pour

Digitized by Google

axes de coordonnées, l'équation de l'hyperbole est $yx = \frac{ab}{2\sin\beta}$ ou $xy = m^2$, forme la plus simple à laquelle l'équation d'une hyperbole puisse être ramenée.

De l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

146.—Soit β l'angle des asymptotes où se trouve l'axe transverse de la courbe. Si on prend pour axes de coordonnées les deux asymptotes, l'équation de la courbe sera $xy \sin\beta = \frac{ab}{2}$, a, b désignant les demi-axes de la courbe. Exprimons $\sin\beta$ en fonction de a et b; désignons par θ l'angle moitié de celui des asymptotes, on a $\beta = 2\theta$, et par suite $\sin\beta = 2\sin\theta\cos\theta$. On a trouvé que $\tang\theta = \frac{b}{a}$, donc

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

par conséquent $\sin\beta = \frac{2ab}{a^2+b^2}$; remplaçant $\sin\beta$ par sa valeur dans l'équation de la courbe, il vient

$$xy = \frac{(a^2+b^2)\,ab}{4ab} = \frac{a^2+b^2}{4}$$

L'expression $\frac{a^2+b^2}{4}$ se nomme quelquefois la puissance de l'hyperbole; posons $\frac{a^2+b^2}{4} = c^2$, alors l'équation de la courbe devient $xy = c^2$.

De la tangente.

147.—On va chercher l'équation de la tangente à l'hyperbole, dans ce système d'axe de coordonnées; pour cela cherchons la condition pour que la droite $y = \alpha x + \beta$ coupe la courbe en deux points ayant des coordonnées égales.

Substituant à la place de y sa valeur dans l'équation $xy = c^2$, on a

$$(1)\quad \alpha x^2 + \beta x - c^2 = 0, \quad (2)\quad \beta^2 + 4c^2\alpha = 0, \quad (3)\quad y' = \alpha x' + \beta.$$

Digitized by Google

Pour que les deux racines de l'équation (1) soient égales, il faut que $\beta^2 + 4c^2\alpha = 0$.

Supposons que la droite passe par le point (x', y'), alors on a l'équation $y' = \alpha' x' + \beta$, ce qui permet avec l'équation (2) de déterminer α, β. Résolvant ces deux équations, il vient

$$\alpha = \frac{x'y' - 2c^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - x'y'}}{x'^2}, \quad \beta = \frac{2c^3 \mp 2c\sqrt{-x'y' + c^2}}{x'}.$$

On voit que pour qu'il y ait deux tangentes, il faut que $c^2 - x'y'$ soit plus grand que zéro, c'est-à-dire que le point soit hors la courbe ; si $c^2 = x'y'$ il n'y en a qu'une, et le point donné est alors pris sur la courbe ; enfin si $c^2 - x'y' < 0$ il n'y a point de tangente, c'est le cas où le point donné est dans l'intérieur de la courbe. Ainsi on arrive aux mêmes conclusions que par la théorie générale des tangentes aux courbes du second degré.

Quand le point est hors la courbe, l'équation des tangentes est

$$y = \frac{x'y' - 2c^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - x'y'}}{x'^2}\, x + \frac{2c^3 \mp 2c\sqrt{c^2 - x'y'}}{x'}.$$

Supposons le point donné sur la courbe ainsi qu'on ait $c^2 - x'y' = 0$.

L'équation de la tangente est alors

$$y = \frac{x'y' - 2c^2}{x'^2}\, x + \frac{2c^3}{x'}.$$

Remplaçons c^2 par sa valeur $x'y'$, il vient $y = \frac{-x'y'}{x'^2}\, x + 2y'$,

équation qui peut se mettre sous la forme

$$y - y' = -\frac{y'}{x'}(x - x').$$

Telle est la forme la plus simple de l'équation de la tangente en un point sur la courbe.

L'équation de la normale au même point (x', y') sera

Digitized by Google

$$y - y' = \frac{x'}{y'}(x - x').$$

148.—La sous-tangente est la partie de l'axe des x comprise entre le pied de l'ordonnée et le point où la tangente coupe l'axe des x. Supposons que M soit le point de contact d'une tangente, PC est la sous-tangente, or $PC = AC - AP = x - x'$. Donc si on fait dans l'équation de la tangente $y = 0$, il vient $x - x' = x'$, ce qui prouve que la sous-tangente est égale à l'abscisse du point de contact, ou autrement que le point P est le milieu de AC, et par suite le point M milieu de la partie CC′ de la tangente comprise entre les deux asymptotes; propriété déjà connue.

149.—Prenons une sécante quelconque $y = \alpha x + \beta$; cherchons les points où elle coupe la courbe; il suffit pour cela d'obtenir les valeurs de x et de y des équations Fig. 93.

$$(1) \qquad xy = c^2, \qquad y = \alpha x + \beta; \qquad (2)$$

effectuant les calculs, il vient

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + c^2\alpha}}{2\alpha}, \qquad y = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + c^2\alpha}}{2}.$$

Désignons par x', y' et x'', y'' les coordonnées des deux points d'intersection, on a

$$x' = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + c^2\alpha}}{2\alpha}, \qquad y' = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + c^2\alpha}}{2},$$

$$x'' = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 + c^2\alpha}}{2\alpha}, \qquad y'' = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + c^2\alpha}}{2}.$$

Faisons dans l'équation $y = 0$, il vient $x = -\frac{\beta}{\alpha}$, alors

$$x - x' = \frac{+\beta - \sqrt{\beta^2 + c^2\alpha} - 2\beta}{2\alpha} = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - c^2\alpha}}{2} = x'' = AH,$$

donc $PS = M'S'$. Il suit de là que les deux triangles SMP, M′S′P′

Digitized by Google

qui ont les côtés parallèles sont égaux ; donc $MP = M'P'$; propriété déjà connue des asymptotes.

Théorie des asymptotes appliquée à l'équation générale du second degré.

150.—L'équation générale du second degré est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

L'équation des asymptotes est

$$y = ax + b, \quad a = \text{limite}\frac{y}{x}, \quad b = \text{limite}(y - ax).$$

Cherchons $\frac{y}{x}$.

Pour cela divisons les deux membres de l'équation de la courbe par x^2, on a

$$A\frac{y^2}{x^2} + B\frac{y}{x} + C + D\frac{y}{x}\frac{1}{x} + E\frac{1}{x} + \frac{F}{x^2} = 0.$$

Posons $\frac{y}{x} = u$, il vient

$$Au^2 + u\left(B + \frac{D}{x}\right) + (Cx^2 + Ex + F)\frac{1}{x^2} = 0;$$

résolvant cette équation par rapport à u, il vient

$$u = \frac{y}{x} = \frac{-\left(B + \frac{D}{x}\right) \pm \sqrt{B^2 + \frac{D^2}{x^2} + \frac{2BD}{x} - \frac{4A}{x^2}(Cx^2 + Ex + F)}}{2A};$$

faisant dans cette expression $x = \infty$, on a

$$a = \text{limite}\frac{y}{x} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Cette valeur de a montre qu'il n'y a que l'hyperbole ou la parabole qui puissent avoir des asymptotes.

Cherchons maintenant la valeur de b ; on a

Digitized by Google

$$b = \text{limite}\,(y - ax),$$

$$y = \frac{-Bx - D \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF}}{2A},$$

alors $y - ax$ aura pour expression

$$y - ax = \frac{-Bx - D \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF}}{2A}$$

$$- \frac{Bx \pm x\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A};$$

simplifiant, il vient

$$y - ax =$$

$$= \frac{-D \pm \sqrt{x^2(B^2 - 4AC) + 2x(BD - 2AE) + D^2 - 4AF} \mp x\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$y - ax = \frac{x^2(B^2 - 4AC) + 2x(BD - 2AE) + D^2 - 4AF - (B^2 - 4AC)x^2 -}{2A\left[\sqrt{x^2(B^2 - 4AC) + 2x(BD - 2AE) + D^2 - 4AF} + \right.}$$

$$\frac{-D^2 + 2D\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2}}{\left. + D + x\sqrt{B^2 - 4AC}\right]},$$

ou

$$y - ax =$$

$$= \frac{2(BD - 2AE) + \dfrac{D^2 - 4AF}{x} - \dfrac{D^2}{x} - 2D\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A\left[\sqrt{B^2 - 4AC + \dfrac{2(BD - 2AE)}{x} + \dfrac{D^2 - 4AF}{x^2}} + \dfrac{D}{x} + \sqrt{B^2 - 4AC}\right]};$$

faisant $x = \infty$, la valeur de $y - ax$ devient

$$\text{limite}\,(y - ax) = \frac{BD - 2AE - D\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A\sqrt{B^2 - 4AC}},$$

expression qui montre que la parabole ne peut avoir d'asymptote, puisque pour $B^2 - 4AC = 0$, $b = \infty$. Ainsi donc, parmi les courbes du second degré il n'y a que l'hyberbole à avoir des asymptotes.

Digitized by Google

Les valeurs de a et b donnent pour l'équation des asymptotes

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} x + \frac{BD - 2AE \mp \sqrt{B^2 - 4AC} \times D}{\pm 2A \sqrt{B^2 - 4AC}}.$$

De cette expression on déduit qu'il faut pour qu'une des asymptotes soit parallèle à l'axe des x qu'on ait $C = 0$; alors l'équation se réduit à

$$y = \frac{BD - 2AE - BD}{2AB} = -\frac{E}{B}, \text{ et à } y = -\frac{B}{A} x + \frac{BD - AE}{AB}.$$

Si on eût pris pour équation des asymptotes $x = a'y + b'$, $a' =$ limite $\frac{x}{y}$, $b' =$ limite $(x - a'y)$, on eût trouvé que pour que la courbe ait une asymptote parallèle à l'axe des y il faut que $A = 0$, et l'équation de cette asymptote est $x = -\frac{D}{B}$.

Donc si l'équation générale manque d'un terme du second degré, le rectangle des variables existant, l'hyperbole a une asymptote parallèle à l'axe sur lequel est compté le carré de l'ordonnée manquant; enfin si les carrés des variables manquent en même temps, les asymptotes sont parallèles aux axes des coordonnées. Ces remarques sont souvent très-utiles lors de la discussion de l'équation numérique du second degré.

Rayon de courbure.

151.—On appelle rayon de courbure, le rayon de la circonférence qui a deux éléments communs avec la courbe; une telle circonférence se nomme circonférence osculatrice; l'expression générale du rayon de courbure est

$$R = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Appliquons cette formule aux courbes du second degré, l'équa-

Digitized by Google

tion qui les représente est $y^2 = mx^2 + 2px$; prenant successivement les différentielles du premier et du deuxième ordre, il vient $ydy = mxdx + pdx$ et $yd^2y + dy^2 = mdx^2$, d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx+p}{y}, \text{ puis } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{my^2 - (mx+p)^2}{y^3},$$

expression qui se réduit à $-\frac{p^2}{y^3}$; remarquant qu'on a $y^2 = mx^2 + 2px$, substituant à la place de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ leurs valeurs dans R, il vient

$$R = -\frac{\left[1 + \frac{(mx+p)^2}{y^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{p^2}{y^3}} = \frac{[y^2 + (mx+p)^2]^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Maintenant remarquons que $mx + p$ est la sous-normale au point (x, y) ; donc $y^2 + (mx+p)^2$ est le carré de la normale ; alors si on désigne par N cette normale, l'expression du rayon de courbure devient

$$R = \frac{(N^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{N^3}{p^2}.$$

Donc dans toute courbe du second degré le rayon de courbure est égal au cube de la normale au même point divisé par le carré du demi-paramètre.

152.—Cherchons quelle est la courbe du second degré où le rayon de courbure est constant. Pour cela il suffit de chercher quelles sont les conditions pour que $y^2 + (mx + p)^2$ soit constant, quel que soit x ; posons $y^2 + (mx+p)^2 = c^2$; développant, il vient

$$y^2 + m^2x^2 + 2mpx + p^2 = c^2,$$

mettant pour y sa valeur $mx^2 + 2px$, on a

$$mx^2(1+m) + 2px(1+m) + p^2 - c^2 = 0 ;$$

de là on déduit qu'il faut pour que cette équation soit satisfaite quel

Digitized by Google

que soit x, qu'on ait $m = -1$, et $p = c$; ainsi il faut que la courbe soit une circonférence, et la normale est égale au rayon de cette circonférence.

Donc dans les courbes du second degré la circonférence est la seule où les rayons de courbure soient égaux.

Ellipse.

153.—L'ellipse rapportée à son centre et à ses axes a pour équation

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

d'où on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2b^2y^2 + b^4x^2}{a^4y^3};$$

alors l'expression générale du rayon de courbure devient

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2(a^2b^2y^2 + b^4x^2)}.$$

Pour se rendre compte comment varie R avec la position du point de l'ellipse, de l'équation tirons la valeur de chacune des quantités a^4y^2 et $a^2b^2y^2$, et mettons-les dans l'expression de R, il vient

$$R = \frac{[a^4b^2 - (a^2 - b^2)\,b^2x^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = \frac{[a^4 - x^2(a^2 - b^2)]^{\frac{3}{2}}}{a^4b}.$$

La quantité $a^2 - b^2$ étant positive, il s'ensuit qu'à mesure que x augmente, c'est-à-dire plus on s'approche d'un des sommets situés sur le grand axe, plus le rayon de courbure diminue, ou encore autrement, plus la courbure de l'ellipse augmente ; car on sait que la courbure varie en raison du rayon de courbure.

D'après cela le rayon de courbure maximum correspond à $x = 0$, abscisse qui est celle des extrémités du petit axe. Ainsi $R = \frac{a^2}{b}$, si R′ désigne le rayon de courbure minimum, pour l'obtenir il suffit de poser $x = a$, alors on a $R' = \frac{b^2}{a}$.

Digitized by Google

Les expressions $R = \frac{a^2}{b}$, $R' = \frac{b^2}{a}$ se construisent de la manière suivante.

Sur OB prenons OE = OA, et sur OA prenons OC = OB; par les points F, C faisons passer une circonférence qui ait son centre sur le grand axe AA'; soient D, G les seconds points où elle coupe BB' et AA'. D'après une propriété connue de la circonférence, on a Fig. 94.

$$\overline{OC}^2 = OE \times OD = b^2 = a \times OD, \text{ d'où } OD = \frac{b^2}{a};$$

ainsi OD représente le rayon de courbure au sommet A; en outre

$$\overline{OE}^2 = OC \times OG = a^2 = b \times OG, \text{ d'où } OG = \frac{a^2}{b} = R,$$

donc OG est le rayon de courbure aux points A, A'.

Au point B la normale est b; d'après le théorème général sur les rayons de courbures des courbes du second ordre, $R = \frac{a^2 b^3}{b^4}$, $\frac{b^2}{a}$ étant le demi-paramètre de l'ellipse, expression qui se réduit à $\frac{a^2}{b}$, celle obtenue directement; ainsi se vérifie dans ce cas particulier ce théorème que le rayon de courbure est égal au cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre.

Considérons une ellipse semblable à la première, dont a', b' soient les demi-axes, alors $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} = K$. Soient R_1, R'_1 les rayons de courbures correspondants à R, R', on a

$$R_1 = \frac{a'^2}{b'}, \quad R'_1 = \frac{b'^2}{a'},$$

expressions qui reviennent à

$$R_1 = \frac{a'}{b'} a' = Ka', \quad R'_1 = \frac{1}{K} b';$$

on a de même

$$R = aK, \quad R' = \frac{1}{K} b, \quad \text{donc } \frac{R}{R'_1} = \frac{a}{a'}, \quad \frac{R'}{R'_1} = \frac{b}{b'}.$$

Digitized by Google

De là on déduit ce théorème, que dans deux ellipses semblables les rayons de courbure maximum et minimum correspondants sont entre eux dans le rapport des axes homologues.

Les expressions $R = \frac{a^2}{b}$, $R' = \frac{b^2}{a}$ montrent que si on construit des ellipses ayant même centre et même petit axe, mais dont le grand axe aille en croissant, leur courbure aux extrémités du petit axe va en diminuant, et celle aux extrémités du grand axe va en croissant; ainsi les ellipses vont en s'aplatissant de plus en plus. Le contraire arrive si c'est le grand axe qui est constant.

Hyperbole.

154.—L'équation de l'hyperbole rapportée à son centre et à ses axes étant

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

on en tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2b^2y^2 - b^4x^2}{a^4y^3};$$

substituant ces valeurs dans l'expression du rayon de courbure, il vient

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2(a^2b^2y^2 - b^4x^2)}.$$

De l'équation de l'hyperbole on tire

$$a^4y^2 = a^2b^2x^2 - a^4b^2, \quad a^2b^2y^2 = b^4x^2 - a^2b^4,$$

alors

$$R = \frac{[b^2x^2(a^2 + b^2) - a^4b^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = \frac{[x^2(a^2 + b^2) - a^4]^{\frac{3}{2}}}{a^4b}.$$

D'après la dernière expression de R, on voit que plus on s'éloigne du sommet de l'hyperbole plus le rayon de courbe augmente, c'est-à-dire que la courbure va en diminuant pour $x = \infty$, $R = \infty$.

Fig. 95. Le point où la courbure est la plus grande est au sommet, et $R = \frac{b^2}{a}$. Pour construire cette expression il faut faire passer une

Digitized by Google

circonférence par les points B, A, extrémités des axes BB′, AA′, dont le centre soit sur l'axe transverse ; soit C le point où elle coupe ce dernier, on a

$$\overline{OB}^2 = OA \times OC, \quad \text{d'où} \quad OC = \frac{b^2}{a};$$

ainsi le rayon de courbure aux sommets est la ligne OC.

Considérons une hyperbole semblable à la première, désignons par a', b' les demi-axes, on a $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = K$, par conséquent

$$R' = \frac{b'^2}{a'} = \frac{b'}{a'} b' = \frac{1}{K} b', \quad \text{alors} \quad \frac{R}{R'} = \frac{b}{b'}.$$

Donc dans deux hyperboles semblables, les rayons de courbure aux sommets sont entre eux comme les axes homologues.

Parabole.

155.—Pour avoir l'expression du rayon de courbure dans la parabole, faisons $m = 0$ dans celle du rayon de courbure de la ligne dont $y^2 = mx^2 + 2px$ est l'équation, il vient

$$R = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

On voit que plus on s'éloigne du sommet de la parabole, plus le rayon de courbure augmente, pour $y = \infty$, $R = \infty$.

La valeur minimum de R correspond à $y = 0$, c'est-à-dire que c'est au sommet où la courbure de la parabole est la plus grande ; en ce point $R = p$.

Donc le rayon de courbure au sommet d'une parabole est le demi-paramètre.

Des Développées.

156.—On appelle développée d'une courbe le lieu des centres des cercles osculateurs à cette courbe.

Soient α, β les coordonnées du centre du cercle osculateur et R son rayon ; on a

Digitized by Google

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}, \quad R = -\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

x, y désignant le point de tangence du cercle osculateur, puis

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{\alpha^2 y}{\alpha x^2}.$$

Pour résoudre le problème il faut éliminer x, y entre les équations.

$$(1) \qquad y^2 = mx^2 + 2px,$$

$$(2) \qquad \alpha = x - \frac{y'(1+y')^2}{y''},$$

$$(3) \qquad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

On a trouvé précédemment que

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{mx+p}{y} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-p^2}{y^3} = y';$$

remplaçant y', y'' par leurs valeurs dans les expressions de α et de β, on a

$$x - \alpha = \frac{(mx+p)\,[y^2 + (mx+p)^2]}{-p^2},$$

à la place de $(mx+p)^2$ mettant sa valeur $my^2 + p^2$, il vient

$$x - \alpha = \frac{(mx+p)\,[y^2(1+m) + p^2]}{-p^2};$$

chassant le dénominateur et ordonnant par rapport à x, on a

$$-x[p^2(1-m) + m(1+m)y^2] = py^2[(1+m) + p^2] - p^3\alpha,$$

d'où
$$x = -\frac{p[y^2(1+m) + p^2 - p\alpha]}{my^2(1+m) + p^2(1+m)}.$$

Cherchons maintenant la valeur de y en fonction de α et de β.

On a

Digitized by Google

$$y=\beta-\frac{1+y'^2}{y''}=\beta+\frac{[y^2+(mx+p)^2]y}{p^2}=\beta+\frac{y(y^2+my^2+p^2)}{p^2},$$

simplifiant, l'équation devient $y^3(1+m)=-p^2\beta$, alors $y^3=-\frac{p^2\beta}{1+m}$.

Dans la valeur de x mettant pour y sa valeur en fonction de α et de β, on a

$$x=-p\,\frac{(1+m)^{\frac{1}{3}}(p^2\beta)^{\frac{2}{3}}+p^2-p\alpha}{m(1+m)^{\frac{1}{3}}(p^2\beta)^{\frac{2}{3}}+p^2(1+m)}.$$

Ainsi on a donc pour les valeurs des coordonnées du point de contact du cercle osculateur

$$x=-p\,\frac{(1+m)^{\frac{1}{3}}(p^2\beta)^{\frac{2}{3}}+p^2-p\alpha}{m(1+m)^{\frac{1}{3}}(p^2\beta)^{\frac{2}{3}}+p^2(1+m)},\qquad y=-\left(\frac{p^2\beta}{1+m}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on a pour l'équation de la développée,

$$\left(\frac{p^2\beta}{1+m}\right)^{\frac{2}{3}}=mp^2\left[\frac{(p^2\beta)^{\frac{2}{3}}(1+m)^{\frac{1}{3}}+p(p-\alpha)}{m(p^2\beta)^{\frac{2}{3}}(1+m)^{\frac{1}{3}}+p^2(1+m)}\right]^2-$$
$$-2p^2\left[\frac{(p^2\beta)^{\frac{2}{3}}(1+m)^{\frac{1}{3}}+p(p-\alpha)}{m(p^2\beta)^{\frac{2}{3}}(1+m)^{\frac{1}{3}}+p^2(1+m)}\right].$$

Cette équation fort compliquée ne peut servir à donner la forme exacte de la courbe dans le cas où m n'est pas zéro, c'est-à-dire dans l'hypothèse des courbes à centre.

Développée de la parabole.

157.—Dans l'équation générale des développées des courbes du second degré faisons $m=0$, il vient

$$(p^2\beta)^{\frac{2}{3}}=-2(p^2\beta)^{\frac{2}{3}}+2p(\alpha-p).$$

Digitized by Google

Ordonnant par rapport à β, on a

$$\beta^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} p^{-\frac{1}{3}} (\alpha - p);$$

ou, en désignant les coordonnées par les lettres habituelles x, y,

$$y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} p^{-\frac{1}{3}} (x - p).$$

Fig. 96. On voit par l'équation que la courbe a deux branches symétriquement placées par rapport à l'axe de la parabole, puis ensuite que ces deux branches partant du même point de cet axe sont entièrement situées à droite de la ligne MR parallèle à l'axe des y, dont $x = p$ est l'équation. A partir du point $y = 0$, $x = p$ la développée s'étend juqu'à l'infini au-dessus et au-dessous de l'axe de la parabole.

On va maintenant montrer que le point $y = 0$, $x = p$ est un point de rebroussement du premier ordre dont l'axe des x est la tangente.

L'équation générale des tangentes est

$$(x - x') \frac{df}{dx} + (y - y') \frac{df}{dy} = 0.$$

Pour le point que l'on considère $y' = 0$, $x' = p$, cette équation devient

$$(x - p) \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy} = 0.$$

De l'équation de la développée on tire

$$\frac{df}{dx} = -\frac{2}{3} p^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{df}{dy} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}},$$

alors pour $x' = p$, $y' = 0$ ces quantités ont pour valeurs :

$$\frac{df}{dx} = -\frac{2}{3} p^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{df}{dy} = \infty.$$

Digitized by Google

L'équation de la tangente devient

$$y = +\frac{2}{3}(x-p)^{-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{\infty} = 0.$$

Donc la tangente au point où commencent les deux branches de la développée est l'axe de la parabole, ainsi ce point est un point de rebroussement du premier ordre.

Cherchons dans quel sens la développée tourne sa convexité relativement à l'axe des x. La courbe étant symétrique par rapport à cet axe, il suffit de considérer la branche dont les ordonnées sont positives. La concavité ou la convexité sont données par le signe que prend $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Prenons les différentielles successives de l'équation

$$y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}p^{-\frac{1}{3}}(x-p),$$

on a

$$\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy = \frac{2}{3}p^{-\frac{1}{3}}dx, \quad -\frac{2}{9}dy^2y^{-\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy^2 = 0,$$

d'où on tire

$$\frac{dy}{dx} = p^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}, \quad 3\frac{d^2y}{dx^2} = p^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}.$$

On voit que pour $y > 0$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif. Donc la développée est convexe vers l'axe de la parabole.

Cette développée ayant des branches infinies, on doit chercher si elle a des asymptotes.

L'équation générale des asymptotes est $x = a'y + b'$, a' et b' ayant pour valeurs $a' = \lim\left(\frac{x}{y}\right)$; $b' = \lim(x - a'y)$.

De l'équation $y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}p^{-\frac{1}{3}}(x-p)$ on tire

Digitized by Google

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}p^{-\frac{1}{3}}(x-p)}=\frac{1}{\frac{2}{3}p^{-\frac{1}{3}}\left(x^{-\frac{1}{3}}-px^{-\frac{2}{3}}\right)}$$

ou

$$\frac{x}{y}=\left[\frac{3}{2}\times\frac{p^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{3}}-px^{-\frac{2}{3}}\right)}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Faisant dans le second membre de cette dernière équation $x=\infty$, on a $\lim\left(\frac{x}{y}\right)=0$. Donc $a'=0$, $b'=\lim(x-a'y)=\lim(x)=\infty$. Donc la développée a une asymptote parallèle à l'axe des y située à l'infini.

Cherchons si cette même courbe a des asymptotes parallèles à l'axe des x.

Pour cela prenons l'équation $y=ax+b$, dans laquelle

$$a=\lim\left(\frac{y}{x}\right),\quad b=\lim(y-ax).$$

De l'équation de la développée on tire

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}p^{-\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}-px^{-\frac{2}{3}}\right)$$

ou

$$\frac{y}{x}=\left[\frac{2}{3}p^{-\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}-px^{-\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Faisant dans le second membre de cette équation $x=\infty$, on a $\lim\left(\frac{y}{x}\right)=a=\infty$. Donc l'asymptote est parallèle à l'axe des y. L'équation $x=a'y+b'$, qui seule pouvait la déterminer, a montré qu'elle est située à l'infini.

Donc la développée de la parabole n'a point d'asymptotes. D'après tous les développements exposés ci-dessus, on voit que
Fig. 96. cette courbe a deux branches qui ont la forme MNP et MN'P'.

Digitized by Google

158. — Pour déterminer les formes des développées dans les courbes à centre, il faut prendre pour axes de coordonnées les axes mêmes de ces courbes; alors l'ellipse et l'hyperbole sont représentées par l'équation $y^2 = m^2x^2 + p^2$.

L'équation de la développée s'obtient comme précédemment en éliminant x et y entre les équations

$$(1)\ y^2 - m^2x^2 = p^2, \quad (2)\ \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad (3)\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Prenant les différentielles successives de l'équation (1), on a

$$ydy = m^2xdx, \quad yd^2y + dy^2 = m^2dx^2,$$

d'où on tire

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{mx}{y}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y}\left(m^2 - \frac{m^2x^2}{y^2}\right) = \frac{m^2p^2}{y^3}.$$

Substituant dans les équations (2), (3) à y', y'' leurs valeurs, il vient

$$x - \alpha = \frac{m^2x(p^2 + m^4x^2)}{m^2p^2} = \frac{x(y^2 + m^4x^2)}{p^2}.$$

Mettant pour y^2 sa valeur $m^2x^2 + p^2$, puis chassant les dénominateurs, on a $x^3 = \frac{-p^2\alpha}{m^2(1+m^2)}$. Cherchons la valeur de y,

$$y - \beta = \frac{-(1+y'^2)}{y''} = -y\frac{y^2 + m^4x^2}{m^2p^2}.$$

A la place de m^4x^2 mettant sa valeur $m^2y^2 - m^2p^2$, on a

$$y - \beta = -\frac{y^2(1+m^2) - m^2p^2}{m^2p^2}y.$$

De là on déduit $$y^3 = \frac{m^2p^2\beta}{1+m^2}.$$

Ainsi les coordonnées du point de contact du cercle osculateur sont

$$x = \left[\frac{-p^2\alpha}{m^2(1+m^2)}\right]^{\frac{1}{3}}, \quad y = \left(\frac{m^2p^2\beta}{1+m^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Digitized by Google

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), il vient pour celle de la développée,

$$\beta^{\frac{2}{3}}\left(\frac{m^2p^2}{1+m^2}\right)^{\frac{2}{3}}=m^2\left[\frac{p^2}{m^2(1+m^2)}\right]^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}}+p^2,$$

ou mettant x et y à la place de α et β,

$$\left(\frac{m^2p^2}{1+m^2}\right)^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}=m^2\left[\frac{p^2}{m^2(1+m^2)}\right]^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}+p^2.$$

Telle est l'équation générale des développées dans les courbes à centre du second degré. On va maintenant chercher la forme et la position de chacune d'elles dans l'ellipse et l'hyperbole.

Développée de l'ellipse.

159.—Dans la dernière équation à laquelle on vient de parvenir, mettons pour m et p, $-\frac{b^2}{a^2}$ et $\frac{b^2}{a}$, on a, toute simplification effectuée,

$$\left(\frac{b^4}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^4}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}-b^2=0.$$

Posons $a^2-b^2=c^2$ et réduisons tous les termes au même dénominateur, il vient

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}. \qquad (1)$$

Telle est la forme la plus simple à laquelle on puisse ramener l'équation de la développée de l'ellipse.

On reconnaît à l'inspection de l'équation que cette courbe est symétrique par rapport à chaque axe de l'ellipse. Cherchons les points où elle coupe chacun d'eux. Dans l'équation (1) faisons d'abord

Fig. 97. $y=0$, on a $x=\frac{c^2}{a}=\frac{a^2-b^2}{a}$, expression qu'on construit en décrivant du sommet B un arc de cercle avec le demi-axe a pour rayon, arc qui, coupant AA′ en F et F′, donne $\overline{OF}^2=a^2-b^2$. Maintenant décrivons une circonférence tangente en F à l'axe, puis du point O comme centre avec a pour rayon décrivons un nouvel arc

Digitized by Google

de cercle, ce dernier coupe la circonférence tangente en F au point S, qui joint au centre de l'ellipse donne, en vertu d'une propriété de la circonférence, $\overline{OF}^2 = OS \times OS' = a^2 - b^2$, d'où $OS' = \frac{a^2 - b^2}{a}$.

D'après cela rabattant S' sur AA' en le faisant tourner autour du centre O, les points M, M' qu'on détermine ainsi sont ceux où la développée coupe le grand axe de l'ellipse.

Les points où la courbe coupe l'axe des y ont pour ordonnées $y = \pm \frac{a^2 - b^2}{b}$. Pour les fixer sur le plan il faut suivre un procédé semblable au précédent. Du point O comme centre avec b pour rayon décrivons une circonférence, cette courbe coupe cette tangente en F à l'axe des x en H, alors tirant la sécante OH, on a $OH \times OH' = \overline{OF}^2\ a^2 - b^2$, d'où $OH' = \frac{a^2 - b^2}{b}$. Maintenant si on ramène le point H' en le faisant tourner autour de O en N et N' sur le petit axe de l'ellipse, on a en ces deux points ceux où la développée coupe l'axe des y.

Prouvons que la courbe ne s'étend pas au delà des points M, M', N, N'.

Résolvant l'équation (1) par rapport à x, il vient

$$x = \left(c^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{a}.$$

Pour que x soit réel il faut que la quantité entre parenthèse soit positive, condition qui donne $y < \frac{c^2}{b^2}$, c'est-à-dire moindre que ON; pour $y = ON$, $x = 0$. Donc la courbe ne s'étend pas au delà des points N et N'. Résolvant la même équation par rapport à y, on a

$$y = \frac{1}{b}\left(c^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour que y soit positif il faut qu'on ait $x < \frac{c^2}{a}$ ou $x < OM$; pour $x = OM$, $y = 0$, ce qui donne le point M. Donc la développée est terminée aux quatre points M, M', N, N'.

Les points auxquels la courbe se termine sont des points de

Digitized by Google

rebroussement du premier ordre dont les tangentes sont les axes.

L'équation générale des tangentes est

$$(x-x')\frac{df}{dx}+(y-y')\frac{df}{dy}=0.$$

Il suffit de considérer les tangentes aux points M et N, la courbe étant symétrique par rapport à chaque axe. Pour le point M, $x'=\frac{a^2-b^2}{a}$, $y'=0$. De l'équation (1) on tire

$$\frac{df}{dy}=\frac{2}{3}b^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}},\quad \frac{df}{dx}=\frac{2}{3}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}},$$

quantités qui deviennent pour le point M

$$\frac{df}{dy}=\frac{2}{3}\frac{b^{\frac{2}{3}}}{0}=\infty,\quad \frac{df}{dx}=\frac{2}{3}ac^{-\frac{2}{3}},$$

en sorte que l'équation de la tangente est

$$y=\frac{2}{3}ac^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{c^2}{a}-x\right)\times\frac{1}{\infty}\quad\text{ou}\quad y=0,$$

à cause du coefficient $\frac{ac^{-\frac{2}{3}}}{\infty}$ qui est zéro. Donc la tangente en M est l'axe des x.

Considérons le point N. On a $x'=0$, $y'=\frac{c^2}{b}$, substituant ces valeurs dans $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ l'équation de la tangente devient

$$x=-\frac{2}{3}bc^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{c^2}{b}-y\right)\times\frac{1}{\infty}\quad\text{ou}\quad x=0,$$

à cause du coefficient $\frac{bc^{-\frac{2}{3}}}{\infty}$. Ainsi l'axe des y est tangent à la développée aux points N et N'.

Donc les quatre points M, M', N, N' sont des points de rebrous-

Digitized by Google

sement du premier ordre, et la tangente en chacun d'eux est l'axe de l'ellipse sur lequel il se trouve.

Il ne nous reste plus qu'à déterminer en quel sens la courbe tourne sa convexité relativement à l'axe des x. Il suffit, à cause de la symétrie, de considérer la partie située au-dessus de cet axe.

De l'équation (1) on tire

$$\frac{2}{3}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx+\frac{2}{3}b^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}dy=0,$$

$$-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}dx^2-\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}dy^2+b^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}d^2y=0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}+\frac{a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}}\right).$$

La valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ montre que, quelle que soit la valeur attribuée à x pourvu que y soit positif, on aura toujours $\frac{d^2y}{dx^2}>0$, c'est-à-dire qu'au-dessus de l'axe des x la courbe est convexe vers cet axe. On voit que si on prend un point au-dessous de l'axe des abscisses $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif, puisque le facteur $\sqrt[3]{y}$ qui entre dans les deux termes est négatif et les autres positifs. Donc pour $y<0$, on a $\frac{d^2y}{dx^2}<0$, c'est-à-dire que la développée au-dessous de l'axe des x tourne sa convexité vers cet axe, résultat que la symétrie nous avait déjà annoncé.

Maintenant on sait que la développée se termine aux points M,M',N,N', qu'elle est tangente à ces points aux axes, puis enfin qu'elle tourne sa convexité vers l'axe des x. Ces notions suffisent pour connaître la position et la forme de cette courbe.

Digitized by Google

Développée de l'hyperbole.

160. — Dans l'équation générale des développée des courbes à centre, mettant pour m^2 et p^2 leurs valeurs $-\frac{b^2}{a^2}$ et $-b^2$, il vient, après avoir effectué toutes les simplifications et posé $c^2 = a^2 + b^2$,

$$b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} = -c^{\frac{4}{3}}. \qquad (1)$$

Telle est la forme la plus simple à laquelle puisse être ramenée l'équation de la développée de l'hyperbole. On voit que cette équation ne diffère de celle de la développée de l'ellipse qu'en ce que b^2 y est remplacé par $-b^2$.

Cherchons les points où cette courbe coupe les axes. Dans l'équation (1) faisant $x = 0$, on trouve $y^2 = -\frac{c^4}{b^2}$, ainsi l'axe des y n'est pas coupé par la courbe.

Faisons $y = 0$, on a

$$x = \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 + b^2}{a}.$$

Fig. 98. Pour construire cette dernière expression, au foyer F de l'hyperbole, décrivons une circonférence tangente à l'axe transverse avec un rayon au moins égal à FA, A étant le sommet correspondant au foyer F. Du centre avec OA $= a$ pour rayon décrivons un arc de cercle qui coupe la première circonférence FRS en H; alors tirant la sécante OH, on a

$$\mathrm{OH} \times \mathrm{OH'} = \overline{\mathrm{OF}}^2 = a^2 + b^2 \text{ d'où } \mathrm{OH'} = \frac{a^2 + b^2}{a},$$

en sorte que si on ramène le point H', en le faisant tourner autour de O sur l'axe AA', les deux points M,M' ainsi obtenus sont ceux où la développée coupe l'axe transverse. On va montrer que cette courbe n'a aucun point entre M et M'. L'équation (1) résolue par rapport à y, donne

$$y = \frac{1}{b}\left(a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Digitized by Google

Pour que y soit réel il faut que la quantité entre parenthèse soit positive, condition qui produit $x > \frac{c^2}{a}$, c'est-à-dire $x > \mathrm{OM}$; pour $x = \mathrm{OM} = \frac{c^2}{a}$, $y = 0$. Ainsi les deux branches de courbe que présente la développée commencent l'une en M et l'autre en M′, et s'étendent dans le sens des x positifs et négatifs jusqu'à l'infini. L'équation (1) montre que la courbe est symétrique par rapport à chaque axe.

Les points M, M′ sont des points de rebroussement du premier ordre ayant pour tangente l'axe transverse. En effet l'équation d'une tangente à une courbe quelconque est

$$(x - x')\frac{df}{dx} + (y - y')\frac{df}{dy} = 0;$$

cherchons ce qu'elle devient pour $x' = \frac{c^2}{a}$, $y' = 0$, et la courbe qui nous occupe. L'équation (1) donne

$$\frac{df}{dx} = \frac{2}{3}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{df}{dy} = -\frac{2}{3}b^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}} \quad \text{pour } x' = \frac{c^2}{a}, y' = 0,$$

ces valeurs deviennent

$$\frac{df}{dx} = \frac{2}{3}ac^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{df}{dy} = -\frac{2}{3}\frac{b^{\frac{2}{3}}}{0} = \infty,$$

en sorte que l'équation de la tangente en M′ est

$$y = \frac{2}{3}ac^{-\frac{2}{3}}\left(x - \frac{c^2}{a}\right) \times \frac{1}{\infty}$$

où $y = 0$ à cause du facteur $\frac{ac^{-\frac{2}{3}}}{\infty}$ qui est zéro.

Donc l'axe transverse est tangent à la courbe en M et M′ et ces points sont des points de rebroussement du premier ordre.

Pour déterminer dans quel sens la courbe tourne sa convexité, par rapport à l'axe des x, différentions l'équation (1) on a

Digitized by Google

$$\frac{2}{3}\, b^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}}\, dy - \frac{2}{3}\, a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{1}{3}}\, dx = 0,$$

$$-\frac{2}{9}\, b^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{4}{3}}\, dy + \frac{2}{3}\, b^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}}\, d^2y + \frac{2}{9}\, a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{4}{3}}\, dx^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = b^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{3}\, a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{3}\, b^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{4}{3}} \times \frac{a^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}}} \right).$$

La valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ peut se remettre sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3}\, \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}\, x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} - \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \right).$$

De l'équation (1) on tire

$$\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} - \frac{c^{\frac{4}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}}};$$

substituant cette valeur de $\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$ dans celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c^{\frac{4}{3}} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{4}{3}}}{3\, b^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}}}.$$

On voit par cette expression que quel que soit x pourvu que y soit positif, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif. Donc la courbe tourne sa convexité vers l'axe transverse.

La courbe ayant quatre branches infinies, il faut chercher si elle a des asymptotes.

L'équation générale des asymptotes est $y = a'x + b'$, dans laquelle $a' = \lim\left(\frac{y}{x}\right)$, $b' = \lim(y - a'x)$.

Digitized by Google

De l'équation de la développée on tire

$$\frac{y}{x}=\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}-\frac{c^{\frac{4}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Si dans la valeur de $\frac{y}{x}$ on fait $x=\infty$, on a $\lim\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{a}{b}$, ainsi $a'=\frac{a}{b}$. Alors $b'=\lim(y-a'x)=\lim\left(y-\frac{a}{b}x\right)$. Mettant dans cette dernière équation pour y sa valeur

$$y=\frac{1}{b}\left(a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

il vient

$$y'-a'x=\frac{1}{b}\left(a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{a}{b}x$$

Multipliant et divisant le second membre par la même quantité

$$\left(a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+ax,$$

il vient

$$y-a'x=\frac{1}{b}\left[\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{4}{3}}\right)^{3}-a^{2}x^{2}}{\left(a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+ax}\right]=$$

$$=\frac{1}{b}\left[\frac{a^{2}x^{2}-c^{4}-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}c^{\frac{8}{3}}-a^{2}x^{2}}{ax+\left(a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}\right];$$

divisant les termes de la fraction du second membre par $x^{\frac{4}{3}}$, on a

$$y-a'x=\frac{1}{b}\left[\frac{-cx^{-\frac{4}{3}}-3a^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{8}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}{\left(a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}-c^{\frac{4}{3}}x^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}+ax^{-\frac{1}{3}}}\right].$$

Digitized by Google

Fig. 98. Maintenant posons $x = \infty$, alors

$$\text{limite}\,(y - a'x) = b' = \frac{1}{b} \times \frac{-3a^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}}{0} = \infty;$$

donc l'asymptote est une ligne parallèle à ON, mais située à l'infini. Pour déterminer ON, on prend $OP = b$, puis la perpendiculaire PM à OP égale à la moitié de l'axe transverse, par conséquent on a

$$a = \text{tang NOP} \times b, \text{ d'où tang NOP} = \frac{a}{b}.$$

On voit d'après tout ce qui vient d'être exposé, qu'étant donnée une courbe du second degré rapportée à son centre et à ses axes, on peut obtenir facilement l'équation de sa développée et la construire. La parabole et l'hyperbole sont les deux courbes du second degré dont les développées ont des branches infinies, courbes qui du reste n'ont point d'asymptotes (*).

Tangentes communes à deux courbes du second degré.

161.—Les équations de deux courbes du second degré par un choix convenable d'axes de coordonnées rectangulaires peuvent toujours se ramener à la forme

$$(1)\quad y^2 = mx^2 + 2px, \qquad (2)\quad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$
$$(3)\qquad y = \alpha x + \beta.$$

L'équation de la tangente commune à ces deux courbes est $y = \alpha x + \beta$, α et β devant être déterminés de manière à ce que cette ligne coupe chacune des deux courbes en deux points ayant des coordonnées égales. Cette condition pour la première courbe donne l'équation obtenue antérieurement, $m\beta^2 - 2p\alpha\beta + p^2 = 0$. Pour obtenir l'équation analogue relativement à la seconde courbe, éliminons y entre les équations (2) et (3), et exprimons que les racines de l'équation résultante sont égales.

L'élimination indiquée donne l'équation

$$x^2(A\alpha^2 + B\alpha + C) + x(2A\alpha\beta + B\beta + D\alpha + E) + A\beta^2 + D\beta + E = 0. \quad (4)$$

(*) Voir pour la suite de la théorie des développées le paragraphe 162.

Digitized by Google

La condition d'égalité des racines de l'équation (4) donne

$$(2A\alpha\beta = B\beta + D\alpha + E)^2 = 4(A\alpha^2 + B\alpha + C)(A\beta^2 + D\beta + E);$$

effectuant les calculs indiqués et réduisant, il vient

$$\alpha^2(D^2 - 4AF) + 2\alpha[\beta(2AE - BD) + DE - 2BF] + \beta^2(B^2 - 4AC) + \\ + 2\beta(BE - 2CD) + E^2 - 4FC = 0.$$

Ainsi les équations déterminant α, β de manière à ce que la droite $y = \alpha x + \beta$ soit tangente à la fois aux deux courbes données, sont

$$(5) \qquad m\beta^2 - 2p\alpha\beta + p^2 = 0,$$

$$(6) \quad \alpha^2(D^2 - 4AF) + 2\alpha[\beta(2AE - BD) + DE - 2BF] + \beta^2(B^2 - 4AC) + \\ + 2\beta(BE - 2CD) + E^2 - 4CF = 0.$$

De la combinaison des équations (5), (6), il résultera quatre valeurs pour α, et β; donc deux courbes ne peuvent avoir au plus que quatre tangentes communes. On va examiner ce que deviennent ces équations dans les principales positions que peuvent occuper, relativement l'une à l'autre, les deux courbes données.

Supposons que les deux courbes aient leurs axes parallèles, leurs équations sont

$$y^2 = mx^2 + 2px, \qquad Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Les équations donnant α, β, deviennent

$$m\beta^2 - 2p\alpha\beta + p^2 = 0, \quad (D^2 - 4AF)\alpha^2 + 2\alpha(2AE\beta + DE) - \\ - 4AC\beta^2 - 4CD\beta + E^2 - 4FC = 0.$$

Si les courbes ayant leurs axes parallèles passent à l'origine des coordonnées, leurs équations sont

$$y^2 = mx^2 + 2px, \qquad Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex = 0;$$

α, β sont donnés par les équations

$$m\beta^2 - 2p\alpha\beta + p^2 = 0, \quad \alpha^2D^2 + 2\alpha(2AE\beta + DE) - 4AC\beta^2 - 4CD\beta + E^2 = 0.$$

Considérons le cas où les deux courbes ont un de leurs axes commun, l'axe des x, les équations qui les représentent sont

Digitized by Google

$$y^2 = mx^2 + 2px, \qquad Ay^2 + Cx^2 + Ex + F = 0,$$

celles donnant α et β sont

$$m\beta^2 - 2p\alpha\beta + p^2 = 0, \qquad 4AF\alpha^2 - 2\alpha(2AE\beta) + 4AC\beta^2 - E^2 + 4FC = 0.$$

Par la forme de la dernière équation on voit que si on élimine α entre les deux dernières, l'équation résultante sera du quatrième degré, mais ne contenant que des termes de degré pair; donc les valeurs de β seront égales deux à deux et de signes contraires; les valeurs de α étant données par l'équation $\alpha^2 = \frac{m\beta^2 + p^2}{2p\beta}$, il s'ensuit qu'elles sont égales deux à deux et de signes contraires. Donc dans ce cas les tangentes sont deux à deux symétriquement placées par rapport à l'axe des x, ce à quoi on devait s'attendre, puisque les deux courbes sont symétriques par rapport à cet axe.

Supposons maintenant que les deux courbes ayant un axe commun, aient un de leurs sommets situé à l'origine des coordonnées, leurs équations deviennent

$$y^2 = mx^2 + 2px, \qquad Ay^2 + Cx^2 + Ex = 0;$$

celles qui donnent α, β sont

$$m\beta^2 - 2p\alpha\beta + p^2 = 0, \qquad 4AE\alpha\beta - 4AC\beta^2 + E^2 = 0.$$

Tirons de la première équation la valeur de α et portons-la dans la seconde, il vient

$$2\beta^3(mAE - 2ACp) + \beta(2AEp^2 + E^2p) = 0.$$

On voit que dans cette position les deux courbes n'ont que trois tangentes communes, l'une d'elles passe à l'origine, puisqu'une des valeurs de β est zéro; les valeurs de α sont données par l'équation $\alpha = \frac{m\beta^2 + p^2}{2p\beta}$, d'où on tire $\alpha = \infty$ pour $\beta = 0$, en sorte que l'équation de la tangente commune $x = \frac{1}{\alpha}y - \frac{\beta}{\alpha}$ est $x = 0$, pour le système de valeur $\beta = 0$, $\alpha = \infty$; ainsi les deux courbes ont pour une de leurs tangentes communes l'axe des y.

Digitized by Google

Considérons enfin le cas où l'une des courbes a son centre à l'origine, les équations sont

$$y^2 = mx^2 + 2px,$$
$$Ay^2 + Cx^2 + F = 0;$$

celles donnant α, β sont

$$m\beta^2 - 2p\alpha\beta + p^2 = 0,$$
$$AF\alpha^2 + AC\beta^2 + FC = 0.$$

En discutant les équations donnant α et β, dans les diverses positions que peuvent occuper les courbes, on peut reconnaître quelles sont celles où ces lignes ont quatre tangentes communes, trois, deux et enfin aucune. Les développements qu'exigent une telle discussion sont trop longs pour être détaillés ici.

162.—Les développées de toutes les courbes jouissent d'une propriété remarquable, qui consiste en ce que toutes leurs tangentes sont normales à la courbe dont elles proviennent.

En effet, on a

$$(1) \qquad \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

$$(2) \qquad \beta = y + \frac{1+y''}{y'},$$

α, β désignant les coordonnées d'un point de la développée de la courbe dont $y = f(x)$ est l'équation.

Les équations (1), (2) peuvent se mettre sous la forme

$$(3) \qquad (x-\alpha)y'' = y'(1+y'^2),$$

$$(4) \qquad (\beta - y)y'' = -(1+y'^2);$$

divisant les équations (3) et (4) membre à membre, il vient :

Digitized by Google

$$\frac{x-\alpha}{y-\beta}=-y',$$

$$\text{ou } (y-\beta)y'+(x-\alpha)=0. \qquad (5)$$

Considérons le point (α, β), la tangente en ce point a pour inclinaison sur l'axe des x, l'expression $\frac{d\beta}{d\alpha}$.

Si on considère le point infiniment voisin de $(\alpha, \beta,)$ ses coordonnées sont $\alpha+d\alpha$, $\beta+d\beta$, celles du point correspondant sur la courbe $y=f(x)$ deviendront $(x+dx)$, $(y+dy)$. Alors l'équation (5) devra être satisfaite par

$$(x+dx),\ (y+dy),\ (\alpha+d\alpha),\ (\beta+d\beta).$$

Conséquemment la différentielle de l'équation (5) prise par rapport à x, y, α, β doit être nulle. Ainsi on a

$$dx+\frac{dy'}{dx}dx(y-\beta)+y'\frac{dy}{dx}dx-d\alpha-y'd\beta=0,$$

ou, en remarquant que

$$\frac{dy'}{dx}=y'',\ \frac{dy}{dx}=y',$$

$$dx[1+y''(y-\beta)+y'^2]-d\alpha-y'd\beta=0,$$

équation qui, en vertu de l'équation (4), se réduit à

$$d\alpha+y'd\beta=0,$$

d'où on tire

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{1}{y'}$$

Alors l'équation de la tangente à la développée au point (α, β) est

$$y-\beta=-\frac{1}{y'}(x-\alpha),$$

Digitized by Google

or celle de la normale à la courbe $y = f(x)$ est

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x).$$

Donc la normale et la tangente se confondent, puisqu'elles passent au même point et qu'elles sont également inclinées sur l'axe des x.

Donc toute tangente à une développée est normale à la courbe d'où elle provient, courbe qui, relativement à la développée, est appelée développante.

De la plus courte distance d'un point à une courbe.

163. — Soient α, β les coordonnées du point donné, et x, y celles du point pris sur la courbe, en désignant par Δ la distance de ces deux points, il vient

$$\Delta^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2.$$

Pour exprimer que le point (x, y) est sur la courbe, on a :

$$y^2 = mx^2 + 2px,$$

équation qui, combinée avec la précédente, donne :

$$\Delta^2 = x^2 + mx^2 + 2px - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta\sqrt{mx^2 + 2px},$$

ou $\Delta^2 = x^2(1+m) - 2x(\alpha - p) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta\sqrt{mx^2 + 2px}.$

On sait que pour rendre

$$x^2(1+m) - 2x(\alpha - p) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta\sqrt{mx^2 + 2px}$$

un minimum ou un maximum, il faut que x soit tel que la dérivée de ce trinôme du second degré soit nulle ; condition qui donne l'équation

Digitized by Google

$$x(1+m)-(\alpha-p)-\beta\frac{mx+p}{\sqrt{mx^2+2px}}=0$$

ou $$\sqrt{mx^2+2px}\,[x(1+m)-(\alpha-p)]-\beta(mx+p)=0.$$

Pour faire disparaître le radical, faisons passer $\beta(mx+p)$ dans le second membre, et élevons aux carrés les deux membres de l'équation résultante, il vient :

$$(mx^2+2px)[x^2(1+m)^2+(\alpha-p)^2-2(x-p)(1+m)x]=$$
$$=\beta^2(mx+p)^2;$$

ordonnant par rapport à x, on a :

$$x^4(1+m)^2m+2x^3[m(1+m)(p-\alpha)+p(1+m)^2]+$$
$$+x^2[m(p-\alpha)^2+4p(p-\alpha)(1+m)-m^2\beta^2]+$$
$$+x[2p(p-\alpha)^2-2mp\beta^2]-p^2\beta^2=0;$$

équation qui est celle déterminant les points où les normales menées du point (α,β) coupent la courbe; pour s'en convaincre, il suffit de la comparer avec l'équation (3) du paragraphe (18).

Les valeurs de x qui rendront Δ^2 un maximum ou un minimum sont celles qui donneront à la dérivée, du second ordre, de Δ^2 une valeur négative ou positive.

Ainsi, l'équation du 4e degré en x, à laquelle on est parvenu, prouve que la plus courte distance d'un point à une courbe du second degré est une des normales menées de ce point à la courbe.

On va appliquer la théorie qu'on vient d'exposer à la circonférence, parce que la simplicité de son équation donne des résultats dont il est plus facile de se rendre compte géométriquement.

L'équation de la circonférence rapportée à son centre est $x^2+y^2=R^2$; en désignant comme ci-dessus les coordonnées du point donné par (α,β), on a, pour la distance d'un point de la courbe au point (α,β),

$$\Delta^2=x^2+y^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha x-2\beta y=R^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha x-2\beta\sqrt{R^2-x^2},$$

par suite

Digitized by Google

$$\frac{d\Delta^2}{dx} = -2\alpha + 2\beta x\,(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

alors la condition à laquelle doit satisfaire x pour rendre Δ^2 un maximum ou un minimum est

$$-\alpha + \frac{\beta x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0,$$

d'où on tire

$$x = \frac{\alpha R}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

substituant cette valeur dans l'équation de la courbe, on a :

$$y = \frac{\beta R}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Ainsi les coordonnées du point cherché sont :

$$x = \pm\frac{\alpha R}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

$$y = \pm\frac{\beta R}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}};$$

d'après cela, la valeur de Δ^2 devient :

$$\Delta^2 = \frac{R^2(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha^2 + \beta^2 \pm 2\left(\frac{R(\alpha^2 + \beta^2)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) =$$

$$R^2 + \alpha^2 + \beta^2 \pm 2R\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Pour déterminer quelle est la valeur de x correspondant au maximum ou au minimum de Δ^2, prenons la dérivée du second ordre de Δ^2, on a :

Digitized by Google

$$\frac{d^2\Delta^2}{dx^2} = \frac{\beta\sqrt{R^2-x^2}+\beta x^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{R^2-x^2} = \frac{\beta R^2}{\pm\sqrt{(R^2-x^2)^3}}.$$

Ainsi donc

$$\frac{d^2\Delta^2}{dx^2} = \pm\frac{\beta R^2}{\sqrt{(R^2-x^2)^3}};$$

On voit que β étant positif ainsi que α, la valeur positive de x correspond au minimnm de Δ^2, et la valeur négative au maximum. Maintenant on va reconnaître par la géométrie que le maximum et le minimum sont donnés par la normale menée du point (α, β), et que les signes de $\frac{d^2\Delta^2}{dx^2}$ correspondent aux valeurs indiquées précédemment.

Fig. 191. En effet, soit M le point donné, faisons passer par ce point un diamètre; soient P, Q ses points d'intersection avec la circonférence. En tirant les coordonnées des points M, P, Q, on forme les deux triangles semblables OMA, OPB, d'où on tire

$$OB : OA :: OP : OM,$$

d'où

$$OB = \frac{OA \times OP}{OM};$$

or

$$OA = \alpha,$$

$$OP = R,$$

$$OM = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

donc

$$OB = x = \frac{\alpha R}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

du même triangle on déduit

Digitized by Google

$$BP : MA :: OP : OM,$$

d'où

$$y = \frac{\beta R}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

les points P, Q étant les extrémités d'un diamètre $OC = OB$, $QC = BP$. Ainsi les coordonnées des points P, Q sont données par les équations

$$x = \frac{\alpha R}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

$$y = \pm\frac{\beta R}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

qui sont identiques à celles donnant les points pour lesquels Δ^2 est un maximum ou un mininum.

Donc la plus courte et la plus grande distance d'un point à une circonférence est la normale à la courbe partant de ce point.

Les valeurs que donnent les considérations géométriques montrent, comme le calcul, que le maximum de Δ correspond aux valeurs négatives, c'est-à-dire au point Q, et les valeurs positives au minimum, c'est-à-dire au point P.

Par le calcul des variations, on démontre que généralement la plus courte distance d'un point à une courbe est une des normales qu'on peut mener de ce point à la courbe.

Considérons une courbe du second ordre MNP et un point A extérieur à cette courbe ; soit AB la normale menée à cette courbe ; au point B où elle la coupe, menons une tangente BC ; cette ligne divise le plan en deux régions, toutes les fois que la courbe et le point ne sont pas dans la même région, la normale AB est la plus courte distance du point à la courbe. En effet, prenons un point quelconque B′ sur la courbe, la ligne AB′ coupe nécessairement, d'après l'hypothèse, BC en un point B″, on a $AB' > AB''$. AB″ est oblique sur BC′ puisque AB lui est perpendiculaire, donc $AB'' > AB$ et à fortiori $AB' > AB$. Ainsi la normale AB est la plus courte distance du point A à la courbe ; si cette dernière avait deux Fig. 192.

Digitized by Google

branches, c'est-à-dire, si elle était une hyperbole, la ligne AB normale à l'une des branches ne serait que la plus courte du point A à la branche où est le point B. Pour obtenir la distance minima absolue, il faudrait prendre la normale la plus courte parmi les deux normales qu'on peut tirer du point A, remplissant d'ailleurs chacune la condition énoncée ci-dessus.

Ce qu'on vient de dire s'applique à toutes courbes, et comme dans l'appendice on donne un procédé graphique pour trouver toutes les normales partant d'un point donné à une courbe quelconque, il s'ensuit qu'on peut trouver maintenant la plus courte distance d'un point à une courbe quelconque.

De la plus courte distance de deux courbes.

164. — Soient $y^2 = mx^2 + 2px$

$$\text{et } Ay^2 + Bxy + cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

les équations des deux courbes. La distance d'un point à une autre des deux courbes est

$$\Delta^2 = x^2 + y^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta y - 2\alpha x.$$

Pour exprimer que les deux points (α,β), (x,y) appartiennent aux courbes, il faut remplacer y par

$$\frac{-Bx - D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2x(BD - 2AE) + D^2 - 4AF}$$

et β par $\sqrt{m\alpha^2 + 2p\alpha}$. La valeur de Δ^2 ne sera plus alors fonction que des deux variables α, x. Pour résoudre la question il faut rendre Δ^2 un maximum ou un minimum, ce qui exige qu'on pose $\frac{d\Delta^2}{dx} = 0$, $\frac{d\Delta^2}{d\alpha} = 0$; équations qui détermineront α et x. Après avoir obtenu les deux points (α,β), (x,y) tels que Δ^2 soit un maximum ou un minimum, il resterait à prouver que ces deux points sont ceux où une des normales communes à ces courbes les rencontre. Les calculs nécessaires pour suivre cette marche sont trop compliqués à cause de l'équation générale du second degré, on va prendre deux circonférences pour donner le plus de détails possible sur cette question.

Digitized by Google

Commençons d'abord par déterminer analytiquement la normale commune à deux courbes ;

Soient $y = f(x)$, $y = F(x)$ les équations des deux courbes, et (x', y'), (x'', y'') les deux points où la normale commune doit aboutir sur les courbes.

La normale à la première a pour équation :

$$y - y' = -\frac{1}{f'(x')}(x - x').$$

Cette ligne doit être perpendiculaire à la tangente à la seconde courbe au point (x'', y''), condition qui donne $1 - \frac{F'(x'')}{f'(x')} = 0$, en outre devant passer au point (x'', y''), on a :

$$y'' - y' = -\frac{1}{f'(x')}(x'' - x').$$

En résumé pour déterminer les deux points (x', y'), (x'', y''), on a les équations

$$(1) \qquad y' = f(x'),$$

$$(2) \qquad y'' = F(x''),$$

$$(3) \qquad y'' - y' = -\frac{1}{f'(x')}(x'' - x'),$$

$$(4) \qquad 1 - \frac{F'(x'')}{f'(x')} = 0.$$

Appliquons cette théorie à deux circonférences, dont

$$x^2 + y^2 = R^2, \ (x - a)^2 + (y - b)^2 = R'^2$$

soient les équations, on a :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

Digitized by Google

puis

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b},$$

en sorte qu'il vient :

$$(1) \qquad x'^2 + y'^2 = R^2,$$

$$(2) \qquad (x''-a)^2 + (y''-b)^2 = R'^2,$$

$$(3) \qquad y''-y' = \frac{y'}{x'}(x''-x'),$$

$$(4) \qquad 1 - \frac{(x''-a)y'}{(y''-b)x'} = 0.$$

On va maintenant prouver que les points (x', y'), (x'', y'') sont sur la ligne des centres.

L'équation de cette ligne est

$$y-b = \frac{b}{a}(x-a).$$

Fig. 103. Pour que les points (x'', y''), (x', y') soient sur cette ligne, il faut que les deux équations

$$(X) \qquad y''-b = \frac{b}{a}(x''-a),$$

$$(Y) \qquad y'-b = \frac{b}{a}(x'-a)$$

soient satisfaites.

Soient B, C deux points où la ligne des centres OO' coupe les circonférences, en tirant les ordonnées des points B, C, O', on reconnaît que $\frac{b}{a} = \frac{y'}{x'}$, ce qui transforme l'équation (X) en

Digitized by Google

$$y'' - b = \frac{y'}{x'}(x'' - a),$$

ou

$$1 - \frac{(x'' - a)y'}{x'(y'' - b)} = 0;$$

or on voit que c'est l'équation (4).

Du triangle BCF comparé à son semblable BO'G, on tire CF : O'G :: BF : BG; remplaçant ces lignes par leurs valeurs en fonction de x', y', x'', y'', on a :

$$y'' - y' = \frac{b - y'}{a - x'}(x'' - x').$$

Alors remplaçant dans l'équation (Y)

$$\frac{y' - b}{x' - a} \text{ par } \frac{y'' - y'}{x'' - x'},$$

$$\text{puis } \frac{b}{a} \text{ par } \frac{y'}{x'},$$

il vient :

$$y'' - y' = \frac{y'}{x'}(x'' - x'),$$

équation qui est celle portant le numéro (3)

Donc les équations (3), (4) indiquent que les points (x', y'), (x'', y'') appartiennent à la ligne des centres, ou, en d'autres termes, que la normale commune à deux circonférences est la ligne des centres.

Maintenant il nous reste à faire voir que les distances de deux de ces points sont les distances maxima et minima des deux circonférences.

Les équations (1), (2), (3), (4) semblent donner quatre valeurs pour chaque coordonnée ; mais dans le cas particulier que nous

Digitized by Google

considérons il n'y a réellement que deux valeurs distinctes pour chaque coordonnée : la propriété dont jouit la ligne des centres le prouve. Si au lieu de prendre deux circonférences on eût pris deux autres courbes, les équations auxquelles on serait parvenu eussent été du même degré ; ainsi on en conclut que généralement deux courbes du second degré ont quatre normales communes, de même qu'elles ont quatre tangentes communes, comme nous l'a montré la théorie des tangentes communes à deux courbes de ce degré. Mais il est à remarquer que ce nombre qui est un maximum, n'existe pas toujours; ainsi, suivant la nature des deux courbes et leur position, il peut arriver qu'elles aient une, deux, trois, quatre normales communes, mais jamais plus. Les équations auxquelles on parvient sont toujours du même degré ; mais comme elles donnent les points où ces normales coupent les courbes et non ces normales mêmes, il s'ensuit que quatre de ces points peuvent être sur une même ligne droite, deux étant pris sur chaque courbe, et alors les deux normales qu'ils semblent donner se réduisent à une seule. Ce fait se présente pour deux circonférences, car les quatre points que l'on obtient par la résolution des équations, dont deux sont sur l'une des courbes et les deux autres sur l'autre, se trouvent sur une même ligne droite, la ligne des centres, ce qui réduit les deux normales que semble fournir le calcul à une seule. Ce fait a lieu encore pour deux ellipses ou deux hyperboles qui ont les premières leurs grands ou leurs petits axes sur la même ligne, et les secondes leurs axes transverses. Ainsi on peut dire que le degré de l'équation finale ne donne point le nombre de normales communes qu'ont les courbes ; mais elles donnent le maximum du nombre qu'elles peuvent avoir.

La distance d'un point de la première circonférence à un point de la seconde est

$$\Delta^2=(x''-x')^2+(y''-y')^2=x''^2+y''^2+x'^2+y'^2-2x'x''-2y'y''.$$

Les points (x'',y''), (x',y') devant satisfaire aux équations

$$(x''-a)^2+(y''-b)^2=R'^2,$$

$$x'^2+y'^2=R^2.$$

Pour que Δ^2 soit un maximum ou un minimum, il faut poser

Digitized by Google

$$\frac{d\Delta^2}{dx'}=0,\quad \frac{d\Delta^2}{dx''}=0;$$

différentiant successivement par rapport à ces deux variables, il vient :

$$\frac{d\Delta^2}{dx'}=2x'+\frac{2y'dy'}{dx'}-2x''-2y''\frac{dy'}{dx'},$$

$$\frac{d\Delta^2}{dx''}=2x''+\frac{2y''dy''}{dx''}-2x'-2y'\frac{dy''}{dx''}.$$

Des équations précédentes on tire

$$\frac{dy''}{dx''}=-\frac{x''-a}{y''-b},$$

$$\frac{dy'}{dx'}=-\frac{x'}{y'};$$

substituant ces valeurs dans les deux dérivées de Δ^2, il vient :

$$\frac{d\Delta^2}{dx'}=2x'-2y'\frac{x'}{y'}-2x''+2y''\frac{x'}{y'}=-2x''+\frac{2y''x'}{y'};$$

$$\frac{d\Delta^2}{dx''}=2x''-2y''\frac{x''-a}{y''-b}-2x'+2y'\frac{x''-a}{y''-b};$$

égalant ces quantités à zéro, on a

$$y'x''=y''x',$$

$$(y''-b)(x''-x')+(x''-a)(y'-y'')=0.$$

Ainsi les équations qui déterminent les coordonnées x', x'', y', y'' sont

(X) $$x'^2+y'^2=R^2,$$

(Y) $$(x''-a)^2+(y''-b)^2=R'^2,$$

(Z) $$y'x''=y''x',$$

(U) $$(y''-b)(x''-x')=(y''-y')(x''-a).$$

Digitized by Google

L'équation (Z) indique clairement que les points (x', y'), (x'', y'') sont sur une même droite passant à l'origine des coordonnées, c'est-à-dire le centre de la première circonférence. L'équation (U) montre que les points (x', y'), (x'', y''), (a, b) sont aussi sur une même ligne; or, la ligne qui détermine les deux premiers passant à l'origine des axes, il s'ensuit que la première passe par le centre de la seconde circonférence, ce qui prouve que les points susceptibles de rendre Δ^2 un maximum ou un minimum sont sur la ligne des centres. Ainsi on voit que les équations exprimant le maximum ou le minimum de Δ^2, expriment les mêmes circonstances que les équations exprimant que la ligne qui joint les deux points (x', y'), (x'', y''), est normale aux deux circonférences.

Donc la distance la plus courte comme la distance la plus longue entre deux courbes est une normale commune à ces deux lignes.

Les valeurs de x', x'' qui rendront Δ^2 un maximum ou un minimum seront celles donnant à $\frac{d^2\Delta^2}{dx'^2}$, $\frac{d^2\Delta^2}{dx''^2}$ des valeurs négatives ou positives.

Ce qu'on vieut de démontrer pour un cas particulier se démontre généralement pour deux courbes quelconques par le calcul des variations; méthode qu'on ne peut pas exposer à cause du cadre que je me suis imposé.

Supposons que par un procédé quelconque on soit parvenu à construire toutes les normales communes aux deux courbes données, on peut demander quelle est celle de toutes ces lignes qui est la plus courte distance entre les deux courbes.

Concevons une normale commune et les tangentes menées aux points où elles coupent les deux courbes, il est évident que ces deux dernières sont parallèles, et qu'elles divisent le plan en trois régions distinctes, deux indéfinies à partir des tangentes dans le sens de leur longueur et de leur largeur, et la troisième dans le sens de sa longueur seulement. Toutes les fois qu'aucune des deux courbes ne se trouve dans cette dernière région, la normale est alors leur plus courte distance.

En effet, soient MNP, M'N'P', deux courbes, dont AB est une des normales communes. Si on suppose que les tangentes BC, AD
Fig. 194. jouissent de la propriété énoncée plus haut, qu'entre elles aucune des courbes n'est comprise, on va prouver que AB est la plus courte distance des lignes MNP, M'N'P'. Car joignons deux points quelconques A', B', dont l'un A' est sur la première et l'autre B' sur la

Digitized by Google

seconde, la ligne A'B' coupe nécessairement, d'après l'hypothèse faite, les lignes BC, AD, soient E, F les deux points d'intersection; on a $A'B' > EF$, or EF étant oblique sur BC et AD, on a $EF > AB$, et à fortiori $A'B' > AB$; il y a un cas où $EF = AB$, c'est celui où la ligne A'B' est perpendiculaire sur BC, mais malgré cela on a toujours $A'B' > AB$; c'est ce qu'il s'agissait de faire voir.

Pour la construction des normales communes je renvoie le lecteur à l'appendice, parce que la méthode générale est analogue à celles exposées dans cette partie de l'ouvrage.

Digitized by Google

DEUXIÈME PARTIE.

Après s'être occupé des propriétés des courbes du second degré pouvant se déduire de l'équation $y^2 = mx^2 + 2px$, on va exposer celles de chaque courbe en particulier.

Ellipse.

Ier Théorème.

Fig. 103. 165.—Dans une ellipse le grand axe et le petit axe sont le plus grand et le plus petit des diamètres qu'on peut mener dans cette courbe, et tout diamètre intermédiaire a une longueur qui s'approche d'autant plus de celle du grand axe que l'angle qu'il fait avec ce dernier est plus aigu.

Soit AB un demi-diamètre de l'ellipse MCN, on a $\overline{AB}^2 = x^2 + y^2$; le point B étant sur la courbe, on a $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, d'où on tire $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; transportant cette valeur dans celle de AB, il vient :

$$\overline{AB}^2 = x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = x^2(a^2 - b^2)\frac{1}{a^2} + b^2. \qquad (1)$$

Désignons par α l'angle BAx, alors $x = AB\cos\alpha$, par conséquent l'équation (1) devient :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AB}^2\cos^2\alpha(a^2 - b^2)\frac{1}{a^2} + b^2,$$

d'où

$$AB = \frac{b}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)}}.$$

Digitized by Google

On voit que AB est $> b$ puisque le dénominateur de la fraction est $<$; 1 en outre l'expression montre que plus α est grand, plus $\cos^2\alpha \frac{a^2-b^2}{a^2}$ diminue, et par conséquent plus AB s'approche de b.

La valeur de AB peut se mettre sous la forme

$$AB = \frac{b}{\sqrt{1-\cos^2\alpha + \frac{b^2}{a^2}\cos^2\alpha}};$$

posons $\frac{b}{a} = c$, il vient :

$$AB = \frac{ac}{\sqrt{\sin^2\alpha + c^2(1-\sin^2\alpha)}} = \frac{a}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\left(\frac{1}{c^2}-1\right)}}.$$

D'après la valeur de AB on voit que ce demi-diamètre est plus petit que le demi-grand axe, puisque le dénominateur de la fraction est > 1, en outre que plus l'angle α diminue, plus AB s'approche de a. Donc la longueur d'un diamètre s'approche d'autant plus de celle du grand axe que l'angle qu'il fait avec ce dernier est aigu.

Ce théorème se démontre géométriquement de la manière suivante :

Soient F, F' les deux foyers, du triangle FAF' on tire :

$$\overline{BF}^2 + \overline{BF'}^2 = 2\overline{AF}^2 + 2\overline{AB}^2,$$

d'où

$$2\overline{AB}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BF'}^2 - 2\overline{AF}^2 = (BF+BF')^2 - 2\overline{AF}^2 - 2BF \times BF'.$$

Dans l'ellipse on sait que la somme des rayons vecteurs est égale au grand axe, donc $BF + BF' = CC'$; alors on a :

$$\overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\overline{CC'}^2 - \overline{AF}^2 - BF \times BF';$$

remarquant que $\frac{1}{2}\overline{CC'}^2 - \overline{AF}^2$ est une quantité constante, il s'en-

Digitized by Google

suit que AB^2 ne dépend que de $BF \times BF'$, alors AB sera d'autant plus grand que la différence entre BF et BF' augmentera ; ce qui a lieu à mesure que le point B s'approche de C. Donc AB ira en croissant à mesure que l'angle BAx diminuera, et lorsque B coïncidera avec C, $F'B = 2AF + FC$ et $FB = FC$, par conséquent

$$\overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\overline{CC'}^2 - \overline{AF}^2 - FC(2AF+FC) = \frac{1}{2}\overline{CC'}^2 - \overline{AF}^2 - \overline{FC}^2 - 2AF \times FC,$$

or $$\frac{1}{4}\overline{CC'}^2 = \overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FC}^2 + 2AF \times FC,$$

donc $$\overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\overline{CC'}^2 - \frac{1}{4}\overline{CC'}^2 = \frac{1}{4}\overline{CC'}^2 = \overline{AC}^2.$$

Donc le diamètre AB est moindre que AC, et s'approche d'autant plus de ce dernier que l'angle BAx est aigu.

II° Théorème.

Fig. 104. 166.—Le petit axe d'une ellipse est moyen proportionnel entre les distances d'un des foyers aux extrémités du grand axe.

Soient F, F' les deux foyers, du triangle rectangle BOF, on tire $\overline{OB}^2 = \overline{BF}^2 - \overline{OF}^2$, mais $BF = OA$, alors $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OF}^2 = (OA+OF)(OA-DF)$; or $OA+OF = FA'$, et $OA-OF = FA$, donc $\overline{OB}^2 = FA \times FA'$: c'est ce qu'il fallait prouver. On peut arriver facilement à cette conclusion par le calcul, car on sait que $OF = \sqrt{a^2-b^2}$, alors $FA = a + \sqrt{a^2-b^2}$, $FA' = a - \sqrt{a^2-b^2}$; donc $FA \times FA' = (a + \sqrt{a^2-b^2})(a^2 - \sqrt{a^2-b^2}) = a^2 - a^2 + b^2 = b^2$. Donc $b^2 = \overline{OB}^2 = FA \times FA'$. Donc le petit axe est moyen proportionnel entre les distances d'un des foyers aux extrémités du grand axe.

III° Théorème.

167.—Dans une ellipse le carré de l'ordonnée à l'un des axes est au produit des abscisses correspondantes comme le carré de l'axe auquel l'ordonnée est parallèle est au carré de celui auquel elle est perpendiculaire.

Digitized by Google

En effet, soient CC′, BB′ les axes de l'ellipse et MP une ordonnée, il faut prouver que Fig. 105.

$$\frac{\overline{MP}^2}{PB' \times PB} = \frac{\overline{CC}^2}{\overline{BB'}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2},$$

en effet, l'équation de la courbe rapportée à ses axes est $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, d'où

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{b^2}{a^2}(a + x)(a - x),$$

or $y = MP$, $x = AP$, $x + a = PB'$, $x - a = PB$;

donc $$\frac{\overline{MP}^2}{PB \times PB'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}, \quad \text{car } AC = b \text{ et } AB = a.$$

Tirons MP′, il faut prouver que

$$\frac{\overline{MP'}^2}{P'C \times P'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

De l'équation de la courbe on tire :

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) = \frac{a^2}{b^2}(b + y)(b - y),$$

or $b + y = P'C'$, $b - y = P'C$, $x = MP'$.

Donc substituant à $b + y$, $b - y$, x leurs valeurs, il vient :

$$\frac{\overline{MP'}^2}{P'C \times P'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Cette propriété qui se déduit si facilement de l'équation de la courbe peut se démontrer par des considérations géométriques. Fig. 106.

Soient F, F′ les deux foyers, tirons MF, MF′; du point M comme centre avec MF pour rayon décrivons une circonférence qui coupe BB′ en F et H, puis prolongeons MF′ jusqu'en K. Soit E le milieu de F′K, joignons A à E.

Digitized by Google

On a $ME = KE - MK = \frac{1}{2}(F'K - 2MK) = \frac{1}{2}F'K'$, ensuite $AP = AF' - PF' = \frac{1}{2}(FF' - HF') = \frac{1}{2}F'H$. La circonférence CK'F'K étant coupée par les lignes F'K, FF' on a, d'après un théorème connu, $F'H \times FF' = F'K' \times F'K$, d'où on tire $\frac{F'K'}{F'H} = \frac{FF'}{F'K}$; prenant la moitié de chaque terme, il vient :

$$\frac{\frac{1}{2}F'K'}{\frac{1}{2}F'H} = \frac{\frac{1}{2}FF'}{\frac{1}{2}F'K};$$

or on a montré précédemment que $\frac{1}{2}F'K' = ME$, $\frac{1}{2}F'H = AP$; remarquant en outre que $F'K = AB'$, il s'ensuit qu'on a $\frac{ME}{AP} = \frac{AF}{AB}$. De cette proportion on déduit la suivante :

$$\frac{ME + AP}{AP} = \frac{AF + AB}{AB}, \quad \text{d'où} \quad \frac{ME + AP}{AF + AB} = \frac{AP}{AB},$$

ce qui donne

$$\frac{ME + AP + AF + AB}{AF + AB} = \frac{AP + AB}{AB};$$

mais $ME + AB = F'M$, $AP + AF = F'P$, $AF + AB = F'B$, $AB + AP = PB'$, donc il vient :

$$\frac{F'M + F'P}{F'B} = \frac{PB'}{AB}. \qquad (1)$$

De la proportion $\frac{ME}{AP} = \frac{AF}{AB}$, on tire :

$$\frac{AP - ME}{AP} = \frac{AB - AF}{AB}, \quad \text{d'où} \quad \frac{AP - ME}{AB - AF} = \frac{AP}{AB};$$

de cette dernière, on déduit

Digitized by Google

$$\frac{AP-ME-AB+AF}{AB-AF}=\frac{AP-AB}{AB}.$$

Maintenant remarquons que $AP+AF=F'B$, $ME+AB=F'M$, $AB-AF=FB$, $AB-AP=PB$; remplaçant chacun de ces binômes par leur valeur, il vient :

$$\frac{F'M-F'B}{F'B'}=\frac{PB}{AB}. \qquad (2)$$

Multiplions les égalités (1), (2) membres à membres, on a :

$$\frac{PB\times PB'}{\overline{AB}^2}=\frac{(F'M+F'P)(F'M-F'P)}{F'B\times F'B'}=\frac{\overline{F'M}^2-\overline{F'P}^2}{F'B\times F'B'}.$$

Du triangle rectangle MPF' on tire $\overline{MP}^2=\overline{F'M}^2-\overline{F'P}^2$, en conséquence on a :

$$\frac{PB\times PB'}{\overline{AB}^2}=\frac{\overline{MP}^2}{F'B\times F'B'};$$

mais en vertu du théorème précédent $\overline{AC}^2=F'B\times F'B'$; alors mettant pour $F'B\times F'B'$ sa valeur $\overline{AC}^2$, il vient :

$$\frac{\overline{MP}^2}{PB\times PB'}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2};$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Il nous reste à prouver que ce théorème est vrai relativement à l'autre axe ; ainsi qu'on a

$$\frac{\overline{MQ}^2}{QC\times QC'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

En effet, dans l'égalité à laquelle on est parvenu en dernier lieu, remplaçons $PB\times PB'$ par $(AB+AP)(AB-AP)$, alors on a :

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{AB}^2-\overline{AP}^2}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AB}^2-\overline{AP}^2}{\overline{MP}^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2},$$

Digitized by Google

d'où on tire :

$$\frac{\overline{AB}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{AP}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{MP}^2}{\overline{AC}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AC}^2 - \overline{MP}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Remarquons que $AP = MQ$, $MP = AQ$, et que $\overline{AC}^2 - \overline{AQ}^2 = (AC + AQ)(AC - AQ) = QC \times QC'$. Donc

$$\frac{\overline{MQ}^2}{QC \times QC'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Ainsi le théorème énoncé est complétement démontré.

IVe Théorème.

168. — Le petit axe d'une ellipse est moyen proportionnel entre le grand axe et le paramètre de cette courbe.

On appelle paramètre dans une courbe du second degré la double ordonnée au foyer.

Fig. 107. En effet, d'après un théorème démontré, on a :

$$\frac{\overline{MF}^2}{FB \times FB'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2},$$

mais le demi-petit axe est moyen proportionnel entre FB et FB' : remplaçant $FB \times FB'$ par $\overline{AC}^2$, l'égalité devient :

$$\frac{\overline{MF}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2},$$

ce qui revient à $\overline{AC}^4 = \overline{MF}^2 \times \overline{AB}^2$; extrayant les racines des deux membres, on a : $\overline{AC}^2 = MF' \times AB$ ou $\overline{4AC}^2 = 2AB \times 2MF$, donc $\overline{CC'}^2 = MM' \times BB'$; c'est ce qu'il fallait prouver.

Au moyen de l'équation de la courbe, on peut démontrer ce théorème, car $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, l'abscisse d'un des foyers est $\sqrt{a^2 - b^2}$, donc

Digitized by Google

$$y^2 = \overline{MF}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - a^2 + b^2) = \frac{b^4}{a^2};$$

ce qui donne $b^2 = ay$ ou $4b^2 = \overline{CC'}^2 = 2a \times 2y = BB' \times MM'$. Donc le petit axe d'une ellipse est moyen proportionnel entre le paramètre et le grand axe.

Ve Théorème.

169. — Connaissant l'un des axes d'une ellipse et la position d'un point de cette courbe relativement aux deux axes, on peut déterminer la longueur du second axe.

En effet, soit BB' l'axe donné, le point A étant milieu de BB', le petit axe sera en direction la ligne CC'; soit M le point donné, alors MP, MP' sont connus; d'après un théorème démontré, on a : Fig. 105.

$$\frac{\overline{MP}^2}{PB \times PB'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}.$$

Désignons par V la moyenne proportionnelle entre les lignes PB, PB', il vient :

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{V}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}, \quad \text{d'où } AC = \frac{MP \times AB}{V};$$

ainsi le petit axe cherché est la quatrième proportionnelle aux lignes V, MP, AB.

Pour résoudre cette question par le calcul, posons :

$$AP = MP' = \alpha, \quad MP = \beta;$$

le point M étant sur la courbe, on a $a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2$; l'inconnue est ici b, l'équation obtenue peut se mettre sous la forme

$$b^2(a^2 - \alpha^2) = a^2\beta^2, \quad \text{d'où } b = \frac{a\beta}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}},$$

il est facile de montrer que cette expression est la même que celle obtenue plus haut, car

Digitized by Google

$$a = AB, \beta = MP, \sqrt{a^2 - \alpha^2} = \sqrt{(a+\alpha)(a-\alpha)} = \sqrt{PB \times B'},$$

donc
$$b = \frac{AB \times MP}{V}.$$

VIe Théorème.

170.—Les ordonnées au grand axe de l'ellipse sont proportionnelles aux ordonnées correspondantes dans la circonférence dont le diamètre est le grand axe de l'ellipse, puis en outre les ordonnées au petit axe sont aussi proportionnelles à celles correspondantes dans la circonférence dont le diamètre est le petit axe de l'ellipse.

Fig. 108. **Soit CBC'B' une ellipse, décrivons des circonférences sur BB' et CC comme diamètres, et prenons les points M, N sur l'ellipse, il faut prouver que $\frac{MP}{M'P} = \frac{b}{a} = \frac{AC}{AB}$, puis ensuite que $\frac{NQ}{N'Q} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{b}$, a, b, étant les demi-axes de l'ellipse.**

En effet, posons $AP = x$, $MP = y$, $M'P = Y$, l'équation de l'ellipse est $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, celle de la circonférence dont $2a$ est le diamètre, est $y^2 = a^2 - x^2$,

donc
$$\frac{MP}{M'P} = \frac{y}{Y} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a};$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Posons $NQ = X$, $N'Q = x$, l'équation de la circonférence dont $2b$ est le diamètre, est $x^2 = b^2 - y^2$, celle de l'ellipse est

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2), \qquad \text{donc } \frac{X}{x} = \frac{NQ}{N'Q} = \frac{\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}}{\sqrt{b^2 - y^2}} = \frac{a}{b}.$$

Ainsi est démontré le théorème annoncé.

Maintenant on va démontrer ce théorème géométriquement.

On a $\frac{\overline{MP}^2}{PB \times PB'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}$, d'où on tire $\overline{MP}^2 = PB \times PB' \times \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}$

Digitized by Google

De la circonférence BCB′ on tire $\overline{M'P}^2 = PB \times PB'$, divisant les deux premières égalités membre à membre, on a :

$$\frac{\overline{M'P}^2}{\overline{MP}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{M'P}{MP} = \frac{AB}{AC}.$$

Donc le rapport $\frac{M'P}{MP}$ est constant.

Par le même théorème invoqué ci-dessus, on a :

$$\overline{NQ}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} \times QC \times QC',$$

de la circonférence CN′C′ on tire $\overline{N'Q}^2 = QC \times QC'$.

Donc $\frac{NQ}{N'Q} = \frac{AB}{AC}$. Donc le rapport $\frac{NQ}{N'Q}$ est constant.

Donc dans l'ellipse les ordonnées au grand axe sont proportionnelles aux ordonnées correspondantes de la circonférence ayant le grand axe pour diamètre ; en outre, les ordonnées au petit axe sont proportionnelles à celles correspondantes de la circonférence dont le petit axe est le diamètre.

Le théorème précédent donne une méthode pour construire graphiquement une ellipse, connaissant les deux axes.

En effet, soient BB′, CC′ les deux axes, décrivons BB′ et CC′ comme diamètres des circonférences. Considérons une ordonnée quelconque MP pour trouver le point de l'ellipse qui y est situé. Joignons M au centre A, la ligne AM coupe la seconde circonférence en D ; tirons enfin DM′ parallèle à AB, le point M′ où elle coupe MP est le point cherché ; car on a $\frac{MP}{M'P} = \frac{a}{b} = \frac{AM}{AD}$. Fig. 109.

Pour déterminer le point de l'ellipse situé sur l'ordonnée NQ de la petite circonférence, joignons N à A et prolongeons AN jusqu'à la rencontre de la première circonférence en K, menons l'ordonnée KH à BB′, cette ligne coupe NQ en N′, point qu'on va montrer appartenir à l'ellipse, car des trangles semblables KAH, NAQ on tire :

$$\frac{NQ}{AH} = \frac{NQ}{N'Q} = \frac{AN}{AK} = \frac{b}{a}.$$

Digitized by Google

Donc le point N' est sur l'ellipse.

Cette méthode permet de construire facilement par points l'ellipse, ses deux axes étant donnés.

VIIe Théorème.

171. — Dans une ellipse le carré de l'ordonnée à un diamètre quelconque est au produit des deux segments comme le carré du diamètre conjugué est au carré du diamètre dont il s'agit.

Fig. 110. Soient CC', BB' deux diamètres conjugués et MP une ordonnée relative au diamètre, CC', il faut prouver que

$$\frac{\overline{MP}^2}{PC \times PC'} = \frac{\overline{BB'}^2}{\overline{CC'}^2}.$$

La démonstration de ce théorème exige celle du suivant.

Fig. 111. Si par un point quelconque I on mène un diamètre à la circonférence EDE' décrite sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre, et qu'au point I on mène à cette ligne la perpendiculaire TT', les ordonnées des points T, T' relativement au diamètre EE' couperont l'ellipse en M et M', qui, joints entre eux, donneront la droite MM', qu'il faut prouver couper le diamètre EE', grand axe de l'ellipse, au même point O que la corde TT'. Ainsi il faut prouver que les deux lignes OM, OM sont le prolongement l'une de l'autre. Les points M, M' appartenant à l'ellipse, on a, d'après un théorème démontré,

$$\frac{TK}{MK} = \frac{T'H}{M'H} \quad \text{ou} \quad \frac{MK}{M'K} = \frac{TK}{T'H}.$$

Les triangles HOT', TOK étant semblables comme ayant les côtés parallèles, on a :

$$\frac{TK}{T'H} = \frac{OK}{OH}, \quad \text{donc} \quad \frac{MK}{M'H} = \frac{OK}{OH},$$

ce qui prouve que les triangles MOK, M'OH sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, alors il suit de là que les angles M'OH, MOK sont égaux, et comme

Digitized by Google

ils ont un côté commun, OM′, OM sont le prolongement l'un de l'autre. Ainsi se trouve démontré le lemme énoncé.

Maintenant du point I tirons IL parallèle à T′H, cette ligne coupe TT′ au point P qu'on va montrer être le milieu de MM′. En effet, le point I est le milieu de TT′ puisque, dans la circonférence EDE′, le diamètre DD′ est perpendiculaire sur la corde TT′. Des triangles semblables T′OM′, IOP, on tire :

$$IT' : PM' :: OI : OP, \quad \text{d'où} \quad IT' + OI : PM' + OP :: OI : OP,$$

mais à cause des triangles semblables TOM, IOP on a

$$IO : OP :: OT : OM,$$

en conséquence on a $IT' + OI : PM' + OP :: OT : OM$, d'où on déduit $IT' + OI + OT : PM' + OP + OM :: OT : OM$. Cette dernière proportion peut se mettre sous la forme

$$2IT' : MM' :: OT : OM :: IT' : PM', \quad \text{donc} \quad MM' = 2\,PM'.$$

C'est ce qu'il fallait prouver. Joignons P au centre A, le diamètre CAC′ est le conjugué du diamètre BB′, mené parallèlement à la corde MM′. Les triangles POI, TOM étant semblables, on a

$$OM : OT :: OP : OI, \quad \text{d'où} \quad OM + OP : OT + OI :: OM : OT,$$

proportion qui revient à $\frac{MP}{TI} = \frac{OM}{OT}$.

Tirons le diamètre AQ de la circonférence EDE′ parallèle à la corde TT′, joignons Q à l'extrémité du diamètre BB′ parallèle à MM′, la ligne QBG sera perpendiculaire sur EE′. Donc $\frac{OM}{OT} = \frac{AB}{AQ}$; alors on a :

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{TI}^2}{\overline{AQ}^2};$$

remarquant que $\overline{TI}^2 = ID \times ID' = (AD + AI)(AD - AI) = \overline{AD}^2 - \overline{AI}^2$ et en outre que $AQ = AD$, et enfin que

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AI}{AD} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AI}^2}{\overline{AD}^2},$$

Digitized by Google

on a :

$$\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AP}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{AI}^2}{\overline{AD}^2};$$

mais $\overline{AC}^2 - \overline{AP}^2 = (AC + AP)(AC + AP) = PC \times PC'$, ce qui donne en substituant cette expression dans l'égalité précédente,

$$\frac{PC \times PC'}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{AI}^2}{\overline{AD}^2},$$

ou, en vertu d'une des égalités écrites plus haut,

$$\frac{PC \times PC'}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{MP}^2}{\overline{AB}^2},$$

d'où on tire enfin :

$$\frac{\overline{MP}^2}{PC \times PC'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{4\overline{AB}^2}{4\overline{AC}^2} = \frac{\overline{BB'}^2}{\overline{CC'}^2};$$

c'est ce qu'il fallait prouver.

Par le calcul on arrive facilement à la même conclusion ; car posons $AB = b'$, $AC = a'$, puis $MP = \beta$, $AP = \alpha$, et prenons pour axes de coordonnées les deux diamètres conjugués CC', BB', l'équation de l'ellipse est $a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$; le point M étant sur la courbe, on a $a^2\beta^2 + b'^2\alpha^2 = a'^2b'^2$, d'où

$$\beta^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - \alpha^2), \quad \text{ou} \quad \frac{\beta^2}{a'^2 - \alpha^2} = \frac{b'^2}{a'^2},$$

or $a'^2 - \alpha'^2 = (a' + \alpha)(a' - \alpha)$, mais $a' + \alpha = PC'$, $a - \alpha = PC$, donc on a :

$$\frac{\overline{MP}^2}{PC \times PC'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{BB'}^2}{\overline{CC'}^2}.$$

Donc dans une ellipse le carré de l'ordonnée à un diamètre quelconque est au produit des deux segments comme le carré du diamètre conjugué est au carré du diamètre dont il est question.

Digitized by Google

VIIIe Théorème.

172.—Si sur le grand axe d'une ellipse on décrit une circonférence comme diamètre, qu'on mène deux diamètres perpendiculaires entre eux, et que des points où ils coupent la circonférence on mène des ordonnées au grand axe, ces lignes coupent l'ellipse en quatre points qui sont les extrémités de deux diamètres conjugués.

Soient RR', TT' les axes de l'ellipse et MM', NN', les diamètres se coupant à angle droit dans la circonférence MRM'R', menons les quatre ordonnées MD, M'D', NE, N'E' au grand axe RR', elles coupent l'ellipse en Q, Q', P, P'; il faut prouver que ces points sont les extrémités de deux diamètres conjugués. En effet, joignons ces points au centre A, les lignes QAQ', PAP' sont droites, car les points M, M', N et N' étant sur une circonférence dont A est le centre, AD = AD', AE = AE', en outre $\frac{MD}{QD} = \frac{M'D'}{Q'D'}$, et comme MD = M'D', il s'ensuit que QD = Q'D'. Donc les triangles rectangles QØD, Q'ØD' sont égaux; donc les angles QAD, QAD' sont égaux, donc la ligne QAQ' est droite; on prouverait de même que PAP' est droite. Il ne reste plus qu'à prouver que les deux diamètres QQ', PP' sont conjugués. Fig. 112.

Pour cela prenons sur NN' un point I quelconque, et élevons en ce point la perpendiculaire LL' à NN', puis des points L, L' où elle coupe la circonférence menons au diamètre RR' des ordonnées, ces lignes coupent l'ellipse en H et H'; joignons ces points, on va montrer que HH' passe au point O, intersection de LL' avec le grand axe RR'. Car tirons les lignes OH, OH', on forme ainsi les triangles HOS, HOS' qui sont semblables, vu que

$$\frac{HS}{H'S'} = \frac{LS}{L'S'} = \frac{OS}{OS'},$$

d'où il suit que les angles HOS, H'OS' sont égaux; donc la ligne HH' est droite.

Maintenant on va prouver que HH' est parallèle à QQ'; en effet, on a :

$$\frac{LS}{HS} = \frac{MD}{QD}, \quad \text{d'où } \frac{LS}{MD} = \frac{HS}{QD};$$

Digitized by Google

or les triangles MAD, LOS sont semblables comme ayant les côtés parallèles, donc $\frac{LS}{MD} = \frac{OS}{AD}$, et en conséquence on a $\frac{HS}{QD} = \frac{OS}{AD}$. Donc les triangles QAD, LOS sont semblables ; donc la corde HH' est parallèle au diamètre QQ'.

Maintenant par le théorème précédent il a été démontré que le point F, intersection de HH' avec PP', est le milieu de HH'; donc les deux diamètres QQ', PP' sont conjugués. Donc si sur le grand axe d'une ellipse on décrit une circonférence, et qu'on mène deux diamètres perpendiculaires entre eux, les ordonnées de leurs extrémités sur la circonférence couperont l'ellipse en quatre points, qui sont les extrémités de deux diamètres conjugués.

Démontrons ce théorème par le calcul ; l'équation rapportée à son centre et à ses axes est $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, celle de la circonférence, dont $2a$ est le diamètre, est $y^2 + x^2 = a^2$.

Les équations des deux diamètres perpendiculaires MM', NN' sont $y = \alpha x$, $y = -\frac{1}{\alpha}x$; cherchons les abscisses des points M, M', N, N' ; pour cela éliminons y successivement entre

$$(1)\quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \qquad (2)\quad y^2 + x^2 = a^2, \qquad (3)\quad y = \alpha x,$$

$$(4)\quad y = -\frac{1}{\alpha}x.$$

(2), (3), (4). La première élimination donne

$$x^2 = \frac{a^2}{1+\alpha^2} = \overline{AD}^2 = \overline{AD'}^2 ;$$

substituant dans l'équation (1) pour x^2 sa valeur, il vient :

$$y^2 = \frac{b^2\alpha^2}{1+\alpha^2} = \overline{QD}^2 = \overline{Q'D'}^2 ;$$

on voit que les coordonnées des points Q, Q' sont égales et de signes contraires ; cela suffirait pour démontrer géométriquement que la ligne QAQ' est droite ; maintenant cherchons l'équation de QQ', d'après la formule générale, on a :

Digitized by Google

$$y-\frac{b\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\frac{\dfrac{-2b\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}}{\dfrac{-2a}{\sqrt{1+\alpha^2}}}\left(x-\frac{a}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right);$$

simplifiant, il vient $y=\frac{b}{a}\alpha x$; ce qui prouve que QQ′ passe à l'origine A, centre de l'ellipse.

De la deuxième élimination on tire :

$$x=\frac{a\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}};$$

transportant cette valeur dans l'équation (1), on a :

$$y=\mp\frac{b}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

en conséquence l'équation de PP′ est

$$y+\frac{b}{\sqrt{1+\alpha^2}}=\frac{2b\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}}{-2a\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}}\left(x-\frac{a\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right),\quad \text{ou}\quad y=\frac{-b}{a\alpha}x;$$

donc PP′ passe au centre de la courbe. On eût pu arriver à ce résultat plus promptement en remplaçant α par $-\frac{1}{\alpha}$, dans l'équation $y=\frac{b}{a}\alpha x$, parce qu'on passe de l'équation (3) à l'équation (4) en y mettant pour α, $-\frac{1}{\alpha}$.

Maintenant posons $\frac{b\alpha}{a}=\beta$, $-\frac{b}{a\alpha}=\beta'$, et multiplions membres à membres les équations résultantes, il vient $\beta\beta'=-\frac{b^2}{a^2}$, condition

Digitized by Google

qui est celle pour que les deux diamètres PP′, QQ′ soient conjugués. Ainsi le théorème est démontré.

IX° Théorème.

173.—On peut tracer une ellipse lorsqu'on connaît la grandeur de deux diamètres conjugués, et l'angle qu'ils font entre eux.

Fig. 113. En effet, soient BB′, CC′ les deux diamètres conjugués faisant entre eux l'angle connu COB. Pour décrire la courbe ramenons le diamètre CC′ à être perpendiculaire sur BB′ sans changer sa longueur ; soit AA′ = CC′ et perpendiculaire sur BB′. Sur AA′ et BB′ comme axes décrivons une ellipse, puis menons une série d'ordonnées QQ′, $Q_1Q'_1$, $Q_2Q'_2$, et par leurs pieds, I, I′, I″, tirons des parallèles à CC′ ; rabattons A, A′, Q, Q′, Q_1, Q'_1 sur ces parallèles en faisant tourner les droites AA′, QQ′, $Q_1Q'_1$, autour des points O, I, I′ I″. On obtient ainsi une suite de points m, m', m_1, m'_1 qui appartiennent à l'ellipse demandée. Car posons CC′ = $2b$, BB′ = $2a'$, l'équation de la courbe rapportée aux axes CC′, BB′ est

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2.$$

L'équation de l'ellipse rapportée aux axes rectangulaires est

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2 ;$$

donc puisque les points Q, Q′, Q_1, Q'_1, etc., jouissent de la propriété $a'^2y^2 + b'^2x^2 = a^2b^2$ relativement aux axes AA′, BB′, les points correspondants m, m', m_1, m'_1, etc., jouiront de la même propriété relativement aux diamètres conjugués CC′, BB′, puisque IQ = Im, IQ_1 = Im_1, etc., et que ces points ont mêmes abscisses. Donc les points m, m', m_1, m'_1 appartiennent à l'ellipse, dont $a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$ est l'équation rapportée aux axes CC′, BB′. Ainsi l'ellipse Cmm_1m_2B est l'ellipse demandée.

Donc on peut décrire une ellipse lorsque deux diamètres conjugués sont donnés de longueur et de position.

174.—On va exposer une autre méthode pour construire une ellipse lorsqu'on donne deux diamètres conjugués en grandeur et en position.

Désignons l'angle COB par β, on a trouvé qu'entre les axes et deux diamètres conjugués il y a les relations suivantes :

Digitized by Google

(1) $ab = a'b' \sin\beta$, (2) $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$.

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par 2, et ajoutons l'équation résultante et l'équation (2) membre à membre, il vient :

$$(a+b)^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin\beta.$$

En retranchant de l'équation (2) la première mise sous la forme $2ab = 2a'b' \sin\beta$, on a :

$$(a-b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\beta.$$

Par conséquent

$$a+b = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin\beta}, \quad a-b = \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\beta}.$$

Désignant pour abréger les radicaux par A, B, les valeurs des demi-axes sont $a = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, $b = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$. Construisons maintenant les équations $a = \frac{1}{2}(A+B)$, $b = \frac{1}{2}(A-B)$, commençons par A et B; au centre, élevons une perpendiculaire à BB' et prenons sur elle à partir du point O, OD = OB. Joignons D à C et à C', les lignes CD, C'D sont A et B; en effet, d'après la propriété du triangle obliquangle, on a $\overline{CD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 - 2OC \times OD \cos DOC$, $\overline{C'D}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OC'}^2 - 2OC' \times OD \cos DOC'$. Or, $OC = b'$, $OD = a'$, $DOC = 90 - COB = 90 - \beta$, donc $\sin\beta = \cos DOC$, ce qui transforme la première égalité en $\overline{CD}^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\beta$; dans la seconde $OC' = b'$, $DOC' = 180 - DOC$; donc $\cos DOC' = -\cos DOC = -\sin\beta$, en conséquence elle devient $\overline{DC'}^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin\beta$. Donc $A = DC'$, $B = DC$. Si, à partir du point D, on prend de chaque côté sur DC', DE et DE' égaux à DC, on aura $C'E = A + B$, $C'E' = A - B$. Enfin déterminant les milieux I, I' de C'E, C'E', on a dans C'I, C'I' les lignes $\frac{1}{2}(A+B)$, $\frac{1}{2}(A-B)$, c'est-à-dire que $a = C'I$, $b = C'I'$. Fig. 114.

Il reste à fixer la position des axes. Pour cela remarquons que les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes sont sur une circonférence, ayant pour centre celui de la courbe et pour diamètre le grand axe. En conséquence, si on mène aux

Digitized by Google

points B, B′ des parallèles à CC′ et aux points C, C′ des parallèles à BB′, ces lignes sont des tangentes à l'ellipse ; alors si du point O comme centre on décrit une circonférence avec $C'I = a$ pour rayon, elle coupe les tangentes en C, C′ aux points M, M′, N, N′, si en ces points on leur élève des perpendiculaires, elles vont se couper deux à deux en F′ et F, points qui déterminent les foyers ; cela étant fait, il n'y a plus qu'à joindre le centre à F et F′, on a ainsi la direction du grand axe et par suite celle du petit ; les sommets A, A′, R, R′ sont par là même fixés, puisque l'on connaît les longueurs des axes. Ainsi les éléments de l'ellipse sont connus, alors sa construction est ramenée à un cas déjà examiné.

175.—Lorsque l'ellipse est décrite, on peut facilement trouver les axes.

Car soit BB′ un diamètre, décrivons sur cette ligne une circonférence, elle coupe l'ellipse en quatre points, dont deux sont B et B′, et les deux autres P et P′. Joignant P à B et à B′, l'angle BPB′ est droit ; alors si par le centre O on mène des parallèles à PB et PB′, les lignes AA′, CC′ étant parallèles à deux cordes supplémentaires sont deux diamètres conjugués, et comme ils sont rectangulaires, ce sont les deux axes de l'ellipse proposée. Donc lorsqu'on donne une ellipse, on peut trouver ses axes facilement. La même construction qu'on vient d'employer pour l'ellipse s'applique à l'hyperbole. On a vu aussi comment, étant donnée une parabole, on peut, sans autre donnée que la courbe, trouver son axe.

Le procédé exposé ci-dessus n'est qu'un cas particulier de celui qu'on emploie pour trouver dans l'ellipse deux diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné.

X° Théorème.

176. — Une ellipse est déterminée et peut être construite quand on donne l'angle de deux diamètres conjugués, l'un d'eux et la position d'un point relativement aux deux diamètres.

Soient BB′ un des diamètres conjugués, CC′ la direction du second, et M un point de la courbe, ainsi MP, AP les coordonnées de ce point sont connues. Toute la question consiste à déterminer la longueur du second diamètre conjugué CC′, car on pourra alors construire la courbe d'après la méthode indiquée précédemment.

En vertu d'un théorème démontré, on a :

Digitized by Google

$$\frac{\overline{MP}^2}{PB \times PB'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}, \quad \text{d'où on tire} \quad AC = \frac{AB \times MP}{\sqrt{PB \times PB'}}.$$ Fig. 115.

Désignons par V la moyenne proportionnelle aux lignes PB, PB', alors $AC = \frac{AB \times MP}{V}$, ce qui prouve que pour obtenir AC il faut chercher la quatrième proportionnelle aux lignes V, AB, MP. Construisons l'expression $AC = \frac{AB \times MP}{\sqrt{PB \times PB'}}$. Pour cela sur BB' comme diamètre, décrivons une circonférence au point P, élevons une perpendiculaire sur BB; soit PQ, on a $PQ^2 = PB \times PB' = V^2$, prenons PK = PM, puis AH = PB, et joignons Q à H'; si maintenant du point K on tire KG parallèle à QH, la ligne PG=AC; en effet, des triangles semblables PQH, PKG, on tire PQ : PK :: PH : PG, d'où

$$PG = \frac{PH \,.\, PK}{PQ}, \quad \text{ou} \quad PG = \frac{AB \,.\, MP}{\sqrt{PB \times PB'}}.$$

Portant sur CC' à partir de A, AC = AC' = PG, on a les extrémités du diamètre cherché. Si on veut résoudre la question par le calcul, il faut poser MP = β, AP = α, AC = b', AB = a', alors l'équation de la courbe rapportée aux axes CC', BB' donne $a'^2\beta^2 + b'^2\alpha^2 = a'^2b'^2$, d'où Fig. 115.

$$b'^2 = \frac{a'^2\beta^2}{a'^2 - \alpha^2}, \quad \text{ou} \quad b' = \frac{a'\beta}{\sqrt{a'^2 - \alpha^2}},$$

expression qu'on peut mettre sous la forme

$$b' = \frac{AB \times MP}{\sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AP}^2}} = \frac{AB \times MP}{\sqrt{(AB + AP)(AB - AP)}} = \frac{AB \times MP}{\sqrt{PB \times PB'}}.$$

Ainsi se trouve démontrée l'identité des résultats obtenus.

XIe Théorème.

177.—Dans une ellipse un des demi-axes est moyen proportionnel entre les distances du point où une tangente le coupe au

Digitized by Google

centre, et le pied de l'ordonnée du point de contact au centre. Soient BCB′ une ellipse, MT une tangente en M, il faut prouver que $\overline{AB}^2 = AT \times AP$, et que $\overline{AC}^2 = AT' \times AQ$.

Considérons d'abord le premier cas. Soient F, F′ les deux foyers de l'ellipse, joignons le point de contact M à F et à F′, et des points A, F, F′, T abaissons des perpendiculaires sur la tangente MT; ces lignes coupent HF′ aux points H, L, D, F′. Du point M comme centre avec MF pour rayon décrivons une circonférence, soient G, F, L les points où elle coupe les lignes BB′ et HF′; joignons F à L, les angles TMF, TML étant égaux, FL est perpendiculaire sur MT en son milieu I; de ce que AF = AF′ il s'ensuit que D est le milieu de LF′ = MF + MF′ = BB′. Les triangles LMF, FL′F′ étant semblables, on a :

$$\frac{F'M}{FM} = \frac{F'M}{ML} = \frac{F'L'}{FI} = \frac{F'T}{FT} = \frac{F'H}{LH}, \quad \text{ainsi on a} \quad \frac{F'M}{ML} = \frac{F'H}{LH}.$$

De cette dernière proportion on tire :

$$\frac{F'M - ML}{ML} = \frac{F'H - LH}{LH};$$

mais F′M − ML = 2MD, car on a F′M + ML = 2ML + 2MD, d'où F′M − ML = 2MD, ensuite F′H = FL + LH ou F′H − HL = F′L = 2AB; en conséquence la proportion précédente se change en

$$\frac{MD}{ML} = \frac{AB}{LH}, \quad \text{d'où on tire} \quad \frac{MD}{MD + ML} = \frac{AB}{AB + LH};$$

mais $ML + MD = \frac{1}{2} LF' = AB$ et $HL + AB = HL + LD = HD$; substituant à la place de ces binômes leur valeur, on a :

$$\frac{MD}{AB} = \frac{AB}{HD}, \quad \text{d'où enfin} \quad \overline{AB}^2 = MD \times HD.$$

A cause de la circonférence LFGE, on a $F'L \times F'E = FF' \times F'G$, alors $\frac{F'L}{FF'} = \frac{F'G}{F'E}$, mais F′L = 2AB, F′E = 2MD, FF′ = 2AF, puis F′G = 2AP, car F′G = AF′ + AG, et $AP = AG + \frac{1}{2} FG$, d'où

Digitized by Google

$2AP = AG + AG + FG$; or $AG + FG = AF = AF'$; donc $2AP = AG + AF' = F'G$. D'après cela la proportion devient $\frac{AB}{AF} = \frac{AP}{MD}$, mais du parallélisme des lignes AD, FL, TH, on déduit :

$$\frac{DH}{AT} = \frac{DL}{AF} = \frac{AB}{AF} \quad \text{ou} \quad \frac{DH}{AT} = \frac{AP}{MD};$$

donc $AP \times AT = MD \times DH$; or on a trouvé plus haut $\overline{AB}^2 = MD \times DH$. Donc $\overline{AB}^2 = AP \times AT$: c'est ce qu'il fallait prouver.

De l'égalité $\overline{AB}^2 = AP \times AT$, on tire :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AT} \quad \text{ou} \quad \frac{AP}{\overline{AB}^2} = \frac{1}{AT}.$$

Multipliant les deux membres par AP, on a :

$$\frac{\overline{AP}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{AP}{AT} = \frac{\overline{MQ}^2}{\overline{AB}^2};$$

or, d'après un théorème connu,

$$\frac{\overline{MQ}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{QC \times QC'}{\overline{AC}^2}, \quad \text{alors} \quad \frac{AP}{AT} = \frac{QC \times QC'}{\overline{AC}^2},$$

mais le produit $QC \times QC' = (AC + AQ)(AC - AQ) = \overline{AC}^2 - \overline{AQ}^2$, donc

$$\frac{AP}{AT} = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AQ}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Les lignes MQ, AT étant parallèles, on a :

$$\frac{AP}{AT} = \frac{MQ}{AT} = \frac{QT'}{AT'},$$

de sorte qu'il vient :

$$\frac{QT'}{AT'} = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AQ}^2}{\overline{AC}^2}, \quad \text{et par conséquent} \quad \frac{AT' - QT'}{AT'} = \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AC}^2};$$

Digitized by Google

mais $AT' - QT' = AQ'$, donc

$$\frac{AQ}{AT'} = \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AC}^2}, \quad \text{d'où} \quad \overline{AC}^2 = AQ \times AT' ;$$

c'est ce qu'il fallait trouver.

Donc dans l'ellipse un des axes est moyen proportionnel entre les distances des points où la tangente le coupe au centre et le pied de l'ordonnée du point de contact au centre.

Ce théorème se déduit facilement de l'équation de la tangente en un point de l'ellipse, car on a $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$, faisons y, $y = 0$, on a :

$$x = AT = \frac{a^2}{x'} = \frac{\overline{AB}^2}{AP}, \quad \text{donc} \quad \overline{AB}^2 = AP \times AT ;$$

maintenant faisons $x = 0$ dans l'équation de la tangente, il vient :

$$y = \frac{b^2}{y'} = AT', \quad \text{d'où} \quad b^2 = \overline{AC}^2 = y' \times AT' = AQ \times AT'.$$

Résultats qui démontrent le théorème.

178.—Maintenant étant donné un point sur l'ellipse, on peut facilement lui mener une tangente, car soit M le point donné, la tangente est fixée lorsqu'on aura le point T ; or, d'après l'égalité $\overline{AB}^2 = AP \times AT$, on voit que AT est une quatrième proportionnelle aux lignes AP, AB, AB; alors pour construire cette ligne, décrivons une circonférence tangente en B à BB' ayant un rayon plus grand que BP, si du point A comme centre on décrit un arc de cercle, avec AP pour rayon, cette courbe va couper la circonférence tangente en B à BB' en deux points, soit K l'un d'eux, par A et K faisons passer une droite et prolongeons-la jusqu'à ce qu'elle coupe la courbe une seconde fois en K', puis au moyen d'un arc de cercle décrit de A comme centre avec AK' pour rayon, rabattons K' en T sur BB', le point T est le point cherché, car on a $\overline{AB}^2 = AK \times AK' = AP \times AT$.

Le point T' pouvant servir de vérification se détermine d'une manière analogue, en menant une circonférence tangente en CC' en C ayant un rayon plus grand que CQ, puis décrivant du point A comme centre, avec AQ pour rayon, un arc de cercle qui coupe

Digitized by Google

la circonférence qu'on vient de décrire en deux points, soit R l'un d'eux; tirant AR et prolongeant cette ligne jusqu'en R', on a, en rabattant par un arc de cercle R' sur C' en T', le point cherché, car $\overline{AC}^2 = AR \times AR' = AQ \times AT'$.

Le théorème qu'on vient de démontrer permet de trouver le point de contact d'une tangente, car on a :

$$\overline{AB}^2 = AT \times AP, \quad \text{d'où} \quad AP = \frac{\overline{AB}^2}{AT}.$$

Pour construire cette expression au point B, menons une circonférence tangente à BB' dont le rayon soit plus grand que BT; du point A avec AT pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupe la circonférence qu'on vient de décrire en deux points. Soit S' l'un d'eux, joignons A à S', la ligne AS' coupe en S la circonférence S'B, si on rabat le point S en P sur BB', le point P sera le pied de l'ordonnée du point de contact, car on a :

$$\overline{AB}^2 = AS' \times AS = AT \times AP, \quad \text{d'où} \quad AP = \frac{\overline{AB}^2}{AS} = \frac{\overline{AB}^2}{AT};$$

en sorte que si au point P on élève une perpendiculaire à BB', le point M où elle coupe la tangente donnée est le point de contact cherché.

L'égalité $AT = \frac{\overline{AB}^2}{AP}$ montre que AT est constant, tant que AB, AP le sont. Donc toutes les tangentes aux ellipses ayant AB pour grand axe et dont l'abscisse du point est AP, coupent l'axe BB' au même point T. De cette remarque on a déduit une méthode pour mener une tangente à l'ellipse en un point donné sur la courbe.

XIIe Théorème.

179.—Si d'un point quelconque O on mène à l'ellipse deux sécantes parallèles à deux diamètres conjugués BB', CC', et que par le point G où l'une d'elles, OG', coupe la courbe, on mène une parallèle à l'autre; cette ligne, en coupant le diamètre BB', donne toujours l'égalité $FB \times FB' - DB \times DB' = DF \times DF'$. Fig. 116.

En effet, posons $BB' = 2b'$, $CC' = 2a'$, l'équation de l'ellipse rapportée aux axes BB', CC' est $a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$, si on désigne

Digitized by Google

OD par α et AD par β, alors $AF = AF' = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - \alpha^2}$, et $FB = AB - AF = b' - \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - \alpha^2}$, $FB' = b' + \frac{b'^2}{a'^2}\sqrt{a'^2 - \alpha^2}$, en outre $DB = b' - \beta$, $DB' = b' + \beta$, $FD = \beta - \frac{b'^2}{a'^2}\sqrt{a'^2 - \alpha^2}$, $FD' = \beta + \frac{b'^2}{a'^2}\sqrt{a'^2 - \alpha^2}$. D'après les égalités précédentes, il vient :

$$FB \times FB' - DB \times DB' = \left(b' + \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - \alpha^2}\right)\left(b' - \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - \alpha^2}\right) - (b' + \beta)(b' - \beta);$$

effectuant les calculs indiqués, on a $\beta^2 - \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - \alpha^2)$; d'un autre côté

$$DF \times DF' = \left(\beta - \frac{b'}{a}\sqrt{a'^2 - \alpha^2}\right)\left(\beta + \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - \alpha^2}\right) = \beta^2 - \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - \alpha^2).$$

Donc $FB \times FB' - DB \times DB' = DF \times DF'$.

Maintenant on va démontrer ce même théorème par des considérations géométriques.

A l'inspection de la figure, on voit qu'on a $FB = FD + DB$, $FB' = DB' - FD$, en conséquence $FB \times FB' = (FD + DB)(DB' - FD) = FD \times DB' + DB \times DB' - \overline{FD}^2 - DB \times FD$, d'où on tire $FB \times FB' - DB \times DB' = DB' \times FD - \overline{FD}^2 - DB \times FD = FD(DB' - FD - DB)$; mais $FD + DB = FB$, alors l'égalité devient $FB \times FB' - DB \times DB' = FD(DB' - FB)$; remarquons que $AF = AF'$ et qu'alors $FB = F'B'$, ce qui donne $DB' - FB = DB' - F'B' = DF'$. Substituant à la place de $DB' - FB$ sa valeur, on a $FB \times FB' - DB \times DB' = DF \times DF'$; c'est ce qu'il fallait prouver.

Le théorème serait vrai si le point de concours des sécantes était à l'intérieur de la courbe ; du reste la démonstration, dans ce cas, serait la même que celle du premier, car on n'a point spécifié que le point de concours eût une position particulière relativement à la courbe.

XIIIe Théorème.

180. — Dans une ellipse, si d'un point quelconque on mène deux sécantes parallèles à deux diamètres conjugués, le produit des

Digitized by Google

distances du point de concours aux points d'intersection avec la courbe situés sur l'une est au produit des distances du point de concours aux points d'intersection avec la courbe situés sur l'autre comme le carré du diamètre conjugué parallèle à la première corde est au carré du diamètre conjugué parallèle à la seconde.

En effet, soient OE', OD' les deux sécantes parallèles aux deux diamètres conjugués BB' CC', il faut prouver que Fig. 117.

$$\frac{OD \times OD'}{OE \times OE'} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2}.$$

Pour cela, menons l'ordonnée ER à AB, en vertu d'un théorème démontré, on a :

$$\frac{\overline{RE}^2}{\overline{DK}^2} = \frac{RB \times RB'}{KB \times KB'},$$

d'où on tire :

$$\frac{\overline{RE}^2 - \overline{DK}^2}{\overline{DK}^2} = \frac{RB \times RB' - KB \times KB'}{KB \times KB'};$$

mais RE=OK, OD=OK—DK, OD'=OK+DK, donc OD×OD'= (ER + DK) (ER — DK) = $\overline{ER}^2 - \overline{DK}^2$. Substituant à $\overline{RE}^2 - \overline{DK}^2$ sa valeur, il vient :

$$\frac{OD \times OD'}{\overline{DK}^2} = \frac{RB \times RB' - KB \times KB'}{KB \times KB'};$$

remarquons qu'en vertu du théorème précédent RB × RB' — KB × KB' = KR × KR', alors l'égalité devient :

$$\frac{OD \times OD'}{\overline{DK}^2} = \frac{KR \times KR'}{KB \times KB'};$$

enfin mettant pour KR, KR' leurs valeurs OE, OE' on a :

$$\frac{OD \times OD'}{\overline{DK}^2} = \frac{OE \times OE'}{KB \times KB'};$$

Digitized by Google

on sait que

$$\frac{\overline{DK}^2}{KB \times KB'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2},$$

alors substituant à $\overline{DK}^2$ sa valeur dans l'égalité

$$\frac{OD \times OD'}{\overline{DK}^2} = \frac{OE \times OE'}{KB \times KB'}, \text{ on a } \frac{OD \times OD'}{OE \times EE'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2}.$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

Si le point de concours des sécantes était dans l'intérieur de l'ellipse en I, on prouverait qu'on a encore :

$$\frac{IG \times IG'}{IE \times IE'} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2}.$$

Supposons que l'une des sécantes GD se meuve parallèlement à elle-même jusqu'à devenir tangente à la courbe en B, les deux parties de la sécante étant égales, on a :

$$\frac{\overline{TB}^2}{TE \times TE'} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2}.$$

Prenons le cas où les deux diamètres conjugués sont égaux, alors $\overline{CC'}^2 = \overline{BB'}^2$, donc $\overline{TB}^2 = TE \times TE'$. Ainsi la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et la partie extérieure, lorsque la tangente et la sécante sont parallèles à deux diamètres conjugués égaux. On sait que ce théorème, qui n'est vrai que pour une position particulière dans l'ellipse, existe toujours dans la circonférence, cela tient à ce que, dans cette dernière courbe, tous les diamètres conjugués sont égaux.

Passons à la démonstration du théorème énoncé, par le calcul. Pour cela désignons par a', b' les demi-diamètres conjugués BB', CC', l'équation de la courbe rapportée à ces axes est $a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$, désignons OK par α et AK par β, le point E étant sur l'ellipse, on a :

$$OK = ER = \frac{a'}{b'}\sqrt{b'^2 - \beta^2}, \quad AR = EK' = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - \alpha^2},$$

Digitized by Google

alors $\quad OD' = \alpha + \frac{a'}{b'}\sqrt{b'^2 - \beta^2}, \quad OD = \alpha - \frac{a'}{b'}\sqrt{b'^2 - \beta^2},$

donc $\quad OD \times OD' = \alpha^2 - \frac{a'^2}{b'^2}(b'^2 - \beta^2),$

de même $\quad OE = \beta - \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - \alpha^2}, \quad OE' = \beta + \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - \alpha^2},$

par conséquent $\quad OE \times OE' = \beta^2 - \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - \alpha^2).$

Des deux égalités qu'on vient d'obtenir en dernier lieu on tire :

$$\frac{OD \times OD'}{OE \times OE'} = \frac{b'^2\alpha^2 - a'^2(b'^2 - \beta^2)}{a'^2\beta^2 - b'^2(a'^2 - \alpha^2)} \times \frac{a'^2}{b'^2};$$

remarquant que les deux termes de la fraction du second membre sont égaux, il s'en suit qu'on a :

$$\frac{OD \times OD'}{OE \times OE'} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2}.$$

Les deux démonstrations qu'on vient d'employer s'appliqueraient si le point de concours des deux sécantes était à l'intérieur de l'ellipse.

XIVe THÉORÈME.

181. — Si par un point hors d'une ellipse on mène une tangente et une diamètre, le carré de la tangente terminée à son point de contact est au produit des distances du point de concours aux points d'intersection de la sécante avec la courbe, comme le carré du diamètre conjugué de celui allant au point de contact est au carré du diamètre situé sur la sécante.

Soient AC la tangente et AB' la sécante par le centre O de l'ellipse, il faut prouver que Fig. 118.

$$\frac{\overline{AC}^2}{AB \times AB'} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2}.$$

En effet, tirons BM parallèle à AC, cette corde sera parallèle au

Digitized by Google

diamètre conjugué de CC'. Des triangles semblables AOC, BOM on tire :

$$AC : BM :: AO : OB, \quad \text{d'où} \quad \overline{AC}^2 = \overline{BM}^2 \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2}.$$

On a aussi, d'après un théorème démontré,

$$\frac{\overline{MB}^2}{MC \times MC'} = \frac{\overline{ON}^2}{\overline{OC}^2}, \quad \text{d'où} \quad \overline{MB}^2 = \frac{\overline{ON}^2}{\overline{OC}^2} \times MC \times MC';$$

mais $MC \times MC' = (OC + OM)(OC - OM) = \overline{OC}^2 - \overline{OM}^2$,

donc $$\overline{BM}^2 = \frac{\overline{ON}^2}{\overline{OC}^2}(\overline{OC}^2 - \overline{OM}^2);$$

substituant à BM sa valeur dans celle de AC, il vient :

$$\overline{AC}^2 = \frac{\overline{ON}^2}{\overline{OC}^2} \times (\overline{OC}^2 - \overline{OM}^2) \times \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2};$$

mais OA : OB :: OC : OM, donc

$$\frac{\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2}{\overline{OA}^2} = \frac{\overline{OC}^2 - \overline{OM}^2}{\overline{OC}^2},$$

de sorte qu'on a

$$\overline{AC}^2 = \frac{\overline{ON}^2}{\overline{OB}^2} \times \frac{\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2}{\overline{OA}^2} \times \overline{OA}^2 = \frac{\overline{ON}^2}{\overline{OB}^2}(\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2) =$$

$$= \frac{\overline{ON}^2}{\overline{OB}^2}(OA + OB)(OA - OB) = \frac{\overline{ON}^2}{OB^2} \times AB \times AB'.$$

De la dernière égalité on tire :

$$\frac{\overline{AC}^2}{AB \times AB'} = \frac{\overline{ON}^2}{\overline{OB}^2} = \frac{\overline{NN'}^2}{\overline{BB'}^2};$$

c'est ce qu'il fallait prouver.

Digitized by Google

Supposons que les deux diamètres BB′, CC′ soient égaux, alors $\overline{AC}^2 = AB \times AB'$. Dans cette hypothèse, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et la partie extérieure, la sécante passant par le centre de l'ellipse.

Donc si d'un point hors d'une ellipse où on mène une tangente à la courbe et un diamètre, le carré de la tangente terminée à son point de contact est au produit des distances du point donné aux points d'intersection de la sécante avec la courbe, comme le carré du diamètre conjugué de celui allant au point de contact de la tangente est au carré du diamètre coïncidant avec la sécante.

XVe Théorème.

182. — Si d'un point quelconque on mène deux sécantes à l'ellipse, le produit des distances du point de concours aux points d'intersection de la première sécante avec la courbe, est au produit des distances du point de concours aux points d'intersection de la deuxième sécante avec l'ellipse, comme le carré du diamètre parallèle à la première est au carré du diamètre parallèle à la seconde.

Soient OD′, OE′ les deux sécantes, auxquelles sont parallèles les deux diamètres BB′, CC′, il faut prouver que

$$\frac{OD \times OD'}{OE \times OE'} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2}.$$

En effet, par les points K, K′, milieux des cordes DD′, E′E, menons les diamètres AK, AK′ et à leur extrémité M et M′, traçons les tangentes MT, M′T à l'ellipse, d'après un théorème connu, ces lignes seront parallèles aux sécantes OD′, OE′, soient H, H′ les points où le diamètre OA coupe les tangentes MT, M′T. L'inspection de la figure donne : Fig. 119.

$$OD \times OD' = (OK - DK)\,(OD + DK) = \overline{OK}^2 - \overline{DK}^2.$$

Des triangles semblables OKA, HMA on tire :

$$OK : HM :: OA : AH, \quad \text{d'où} \quad \overline{OK}^2 = \frac{\overline{HM}^2 \times \overline{OA}^2}{\overline{AH}^2};$$

Digitized by Google

mais, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{\overline{HM}^2}{Hm \times Hm'} = \frac{\overline{HM}^2}{(AH+Am)(AH-Am)} = \frac{\overline{HM}^2}{\overline{AH}^2-\overline{Am}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{Am}^2},$$

alors
$$\overline{HM}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{Am}^2}(\overline{AN}^2-\overline{Am}^2);$$

substituant à $\overline{HM}^2$ sa valeur dans celle de $\overline{OK}^2$, il vient :

$$\overline{OK}^2 = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{AH}^2} \times \frac{\overline{AC}^2}{\overline{Am}^2}(\overline{AH}^2-\overline{Am}^2).$$

Considérons le point K, de ce point partent deux sécantes DK, KA dont l'une passe par le centre, alors on a :

$$\frac{DK \times D'K}{KM \times KN} = \frac{\overline{DK}^2}{(AM-AK)(AM+AK)} = \frac{\overline{DK}^2}{\overline{AM}^2-\overline{AK}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AM}^2},$$

d'où
$$\overline{DK}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AM}^2}(\overline{AM}^2-\overline{AK}^2);$$

substituant dans le produit $OD \times OD'$ à $\overline{KO}^2$, $\overline{DK}^2$, leurs valeurs, il vient :

$$OD \times OD' = \overline{OK}^2 - \overline{DK}^2 = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{AH}^2} \times \frac{\overline{AC}^2}{\overline{Am}^2}(\overline{AH}^2-\overline{Am}^2) - \\ - \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AM}^2}(\overline{AM}^2-\overline{AK}^2).$$

Le second membre de cette égalité peut se mettre sous la forme

$$\overline{AC}^2\left(\frac{\overline{AO}^2}{\overline{Am}^2}-\frac{\overline{OA}^2}{\overline{AH}^2}\right) - \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AM}^2}(\overline{AM}^2-\overline{AK}^2) = \\ = \frac{\overline{AO}^2 \times \overline{AC}^2}{\overline{Am}^2 \times \overline{AH}^2}(\overline{AH}^2-\overline{Am}^2) - \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AH}^2}(\overline{AH}^2-\overline{AO}^2),$$

Digitized by Google

car des triangles semblables HAM, OAK, on tire :

$$\frac{OA}{AH}=\frac{AK}{AM}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\overline{AH}^2-\overline{OA}^2}{\overline{AH}^2}=\frac{\overline{AM}^2-\overline{AK}^2}{\overline{AM}^2}.$$

D'après la transformation qu'on vient de faire subir au second membre, l'égalité devient :

$$OD \times OD' = \frac{\overline{OA}^2 \times \overline{AC}^2}{\overline{Am}^2} - \frac{\overline{OA}^2 \times \overline{AC}^2}{\overline{AH}^2} - \overline{AC}^2 + \frac{\overline{OA}^2 \times \overline{AC}^2}{\overline{AH}^2} =$$

$$= \frac{\overline{AC}^2}{\overline{Am}^2}\left(\overline{OA}^2 - \overline{Am}^2\right);$$

en agissant pour la sécante OE' comme on vient de le faire pour OD', on trouverait :

$$OE \times OE' = \overline{OK'}^2 - \overline{EK'}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{Am}^2}\left(\overline{OA}^2 - \overline{Am}^2\right).$$

Divisons maintenant les égalités auxquelles on vient de parvenir membres à membres, il vient :

$$\frac{OD \times OD'}{OE' \times OE} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2},$$

égalité qui démontre le théorème énoncé. On démontrerait de la même manière le théorème dans le cas où le point de concours des sécantes serait à l'intérieur de l'ellipse, ainsi pour les sécantes QV', QE', on a :

$$\frac{QV \times QV'}{QE' \times QE} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2}.$$

Donc, dans une ellipse, si on tire deux sécantes terminées à leur second point d'intersection avec la courbe, le produit des deux parties de la première est au produit des deux parties de la seconde, comme le carré du diamètre parallèle à la première est au carré du diamètre parallèle à la deuxième.

Digitized by Google

Supposons que les deux sécantes soient parallèles à deux diamètres conjugués égaux, alors $OD \times OD' = OE \times OE'$, ainsi le rectangle compris sous les deux parties de la première sécante est équivalent à celui compris sous les deux parties de la deuxième ; ce théorème qu'on voit n'exister que dans une position particulière pour l'ellipse existe toujours comme on l'a démontré dans la circonférence. Supposons que les deux sécantes soient l'une un diamètre et l'autre une des cordes que ce diamètre divise en deux parties égales, désignons par DD', et MN les deux sécantes, on aura, par le théorème précédent,

$$\frac{\overline{DK}^2}{KM \times KN} = \frac{\overline{CC'}^2}{MN^2};$$

donc le carré de l'ordonnée à un diamètre quelconque est au produit des deux segments correspondants comme le carré du diamètre parallèle à l'ordonnée est au carré de celui dont il s'agit.

Si les deux sécantes se meuvent parallèlement à elle même jusqu'à devenir les tangentes TM, TM', le théorème existant toujours, on aura :

$$\frac{\overline{TM}^2}{\overline{TM'}^2} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2} = \frac{OD \times OD'}{OE \times OE'};$$

donc les rectangles compris sous deux sécantes dans l'ellipse sont entre eux comme les carrés des tangentes parallèles ou comme ceux des diamètres parallèles.

Fig. 183. 183. — De ce théorème il résulte que si deux sécantes OB, OA sont parallèles à deux tangentes TM, TM', puis ensuite que deux autres sécantes DE', DF' soient parallèles aux deux premières, on aura :

$$\frac{\overline{TM}^2}{\overline{TM'}^2} = \frac{DE \times DE'}{DF \times DF'}, \quad \text{et} \quad \frac{\overline{TM}^2}{\overline{TM'}^2} = \frac{OA \times OA'}{OB \times OB'},$$

donc

$$\frac{DE \times DE'}{DF \times DF'} = \frac{OA \times OA'}{OB \times OB'}.$$

Donc les rectangles compris sous les parties de deux sécantes à l'ellipse qui se rencontrent sont dans le même rapport que les rectangles compris sous les parties de deux autres sécantes parallèles aux premières.

Digitized by Google

184. — De cette dernière propriété de l'ellipse on va déduire un procédé pour construire une ellipse quand on en connaît cinq points.

En effet soient A, B, C, D, E les cinq points donnés. Tirons les deux sécantes AB, DC, elles se coupent en I ; par le cinquième point E menons des parallèles à AI, DI, elles vont couper DI, AI en O et O', et la courbe en G et K qu'il s'agit de déterminer.

Par le théorème précédent, on a :

$$\frac{OK \times OE}{OD \times OC} = \frac{AI \times IB}{IC \times ID}, \quad \text{d'où} \quad OK = \frac{AI \times IB \times OD \times OC}{IC \times ID \times OE},$$

on a, en outre,

$$\frac{O'G \times O'E}{O'A \times O'B} = \frac{IC \times ID}{IB \times IA}, \quad \text{d'où} \quad O'G = \frac{IC \times ID \times O'A \times O'B}{IB \times IA \times O'G \times O'E};$$

ainsi les points K, G sont déterminés ; en agissant de la même manière, on trouverait, en se servant des points K, G, d'autres points, de sorte qu'on peut construire la courbe par points.

Pour obtenir le centre de l'ellipse, joignons les milieux H, H' des cordes parallèles AB et EK et ceux L, L' des cordes parallèles DC, EG ; les lignes HH', LL' en se coupant au point P, donnent le centre de l'ellipse.

Cherchons maintenant la longueur du diamètre MM'. Pour cela, désignons par 2X la longueur du conjugué de MM', on a :

$$\frac{\overline{BH}^2}{HM \times HM'} = \frac{\overline{X}^2}{\overline{PM}^2}, \quad \frac{\overline{H'K}^2}{H'M \times H'M'} = \frac{\overline{X}^2}{\overline{PM}^2}.$$

Donc

$$\frac{\overline{BH}^2}{\overline{H'K}^2} = \frac{HM \times HM'}{H'M \times H'M'} = \frac{\overline{PM}^2 - \overline{HP}^2}{\overline{PM}^2 - \overline{H'P}^2}.$$

Résolvons cette dernière équation par rapport à $\overline{PM}^2$, il vient :

$$\overline{PM}^2 = \frac{\overline{P'H}^2 \times \overline{BH}^2 - \overline{PH}^2 \times \overline{H'K}^2}{\overline{BH}^2 - \overline{H'K}^2};$$

posons $\overline{V}^2 = \overline{P'H}^2 \times BH$, $\overline{U}^2 = PH \times H'K$, $\overline{Z}^2 = \overline{BH}^2 - \overline{H'K}$, il vient :

Digitized by Google

$$\overline{PM}^2 = \frac{\overline{V}^4 - \overline{v}^4}{\overline{Z}^2} = \frac{(V^2 + \overline{U}^2)(\overline{v}^2 - \overline{U}^2)}{\overline{Z}^2};$$

remplaçant $\overline{V}^2 + \overline{U}^2$ par $\overline{V'}^2$ et $\overline{v}^2 - \overline{U}^2$ par $\overline{U'}^2$, on a :

$$\overline{PM}^2 = \frac{\overline{V'}^2 \times \overline{U'}^2}{\overline{Z}^2}, \quad \text{d'où} \quad PM = \frac{V' \times U'}{Z'}.$$

Ainsi PM est une quatrième proportionnelle aux lignes Z, V', U'.

Ayant PM on peut facilement obtenir son conjugué, car on a :

$$\frac{\overline{BH}^2}{HM \times HM'} = \frac{\overline{PN}^2}{\overline{PM}^2}, \quad \text{d'où} \quad PN = \frac{PM \times BH}{\sqrt{HM \times HM'}}.$$

Maintenant qu'on connaît deux diamètres conjugués de grandeur et de position on peut, par une méthode déjà exposée, construire la courbe par points.

XVIe Théorème.

185.—Si en un point pris sur une ellipse on mène une tangente et l'ordonnée du point de contact à un diamètre quelconque, le carré de ce demi-diamètre est moyen proportionnel entre les distances du centre au pied de l'ordonnée et à la tangente, ces distances comptées sur le diamètre en question. Soient M le point donné, BB' le diamètre et MT la tangente, il faut prouver que $\overline{AB}^2 = AT \times AP$. En effet, prolongeons MP jusqu'en Q, et tirons BH parallèle à la tangente MT, cette ligne sera alors parallèle au conjugué de MM'; maintenant au point B traçons la tangente à l'ellipse, soit BKS. Les lignes MQ, BH étant parallèles à deux tangentes MK, MT, on a :

Fig. 122.

$$\frac{OH \times OB}{OM \times OQ} = \frac{\overline{MK}^2}{\overline{BK}^2};$$

mais les lignes BK, MQ étant parallèles, ainsi que MK et BH, MK = OB, BK = OM ; en conséquence, il vient :

$$\frac{OH \times OB}{OM \times OQ} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OM}^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{OH}{OQ} = \frac{OB}{OM}.$$

Digitized by Google

De cette proportion on tire :

$$\frac{OH}{OB}=\frac{OQ}{OM}, \text{ et } \frac{OH-OB}{OB}=\frac{OQ-OM}{OM};$$

alors on a :

$$\frac{OH-OB}{OQ-OM}=\frac{OB}{OM}.$$

Maintenant remarquons que $OH-OB=2IO$, car $OH=IO+IH$, $OB=IH-IO$, de sorte que $OH-OB=2IO$; de même $OQ-OM=2OP$; ainsi la dernière proportion devient $\frac{IO}{OP}=\frac{OB}{OM}$, ce qui prouve que les deux triangles IOP, MOB sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Donc les lignes MB, IP sont parallèles. De là on déduit, ainsi que du parallélisme des lignes BH et MT, $\frac{AP}{AB}=\frac{AI}{AM}=\frac{AB}{AT}$, ce qui donne $\overline{AB}^2=AP\times AT$, ce qu'il fallait prouver.

Ce théorème se démontre facilement par le calcul, car désignons AP, PM par x', y'; l'équation de la tangente, en prenant pour axes de coordonnées CC', BB', est $a'^2yy'+b'^2xx'=a'^2b'^2$. Faisons $y=0$, il vient $a'^2=xx'$, or $2a'=AB$, $x=AT$, $x'=AP$, donc $\overline{AB}^2=AP\times AB$.

Donc, si on a deux diamètres conjugués quelconques, qu'on mène une tangente à la courbe jusqu'à la rencontre d'un des diamètres, puis ensuite qu'on tire l'ordonnée du point de contact, le demi-diamètre auquel est relative l'ordonnée est moyen proportionnel entre les distances du centre à la tangente et au pied de l'ordonnée, ces distances étant comptées sur le diamètre en question.

XVIIe THÉORÈME.

186.—Les parallélogrammes circonscrits à une même ellipse sont équivalents.

Ce théorème a été démontré par le calcul : on va maintenant le démontrer par la géométrie.

Soient ABCD, *abcd* deux parallélogrammes circonscrits à l'ellipse, il faut prouver que ces deux quadrilatères sont équivalents. Pour cela, menons TS, T'S' parallèles aux diamètres OP, OQ, Fig. 123.

Digitized by Google

puis joignons T à T′ on a démontré précédemment que P′Q′ était parallèle à TT′, alors on a Q′T : T′P′ :: Q′I : P′I, d'où

$$\frac{\overline{Q'T}^2}{\overline{T'P}^2}=\frac{\overline{Q'I}^2}{\overline{P'I}^2}=\frac{\overline{ON}^2}{\overline{OM}^2};\ \text{donc}\ \frac{Q'T}{P'T'}=\frac{ON}{OM}=\frac{Q'B}{P'b}.$$

Les parallélogrammes OQ′BN′, OQ′T′S′ sont proportionnels aux lignes Q′B, Q′T′, de même OP′*b*M′, OP′TS sont proportionnels à P′*b*, P′T, alors on a :

$$\frac{OQ'BN'}{OQ'T'S'}=\frac{ON'}{Q'T'},\quad \frac{OP'bM'}{OP'TS}=\frac{OM}{P'T};$$

or on a démontré que $\frac{ON'}{Q'T'}=\frac{OM'}{P'T}$; donc on a :

$$\frac{OQ'BN'}{OQ'T'S'}=\frac{OP'bM'}{OP'TS}.$$

Les parallélogrammes OQ′TS′, OP′TS sont équivalents, puisqu'ils sont le double des triangles OP′T, OQ′T′ qui sont équivalents.

Donc les parallélogrammes ABCD, *abcd*, qui sont quatre fois les précédents, sont équivalents.

Donc tous les parallélogrammes circonscrits à une ellipse sont équivalents.

XVIIIe Théorème.

187.—Si de deux points pris aux extrémités de deux diamètres conjugués on mène des ordonnées à un diamètre quelconque, le carré de la moitié de ce diamètre est la somme des carrés des distances du centre aux pieds des ordonnées, ces distances étant comptées sur le diamètre auquel les ordonnées sont relatives.

Fig. 124. Soient BB′, CC′ deux diamètres conjugués, puis MM′ un diamètre quelconque, des extrémités A′, B′ menons les ordonnées A′P, B′P′. Il faut prouver que $\overline{OM}^2=\overline{OP}^2+\overline{OP'}^2$. La ligne A′T étant tangente à la courbe, les triangls TA′P, OP′B′ sont semblables, car A′P, B′P′ sont parallèles ainsi que OB′ et A′T, par conséquent on a :

Digitized by Google

$$\frac{\overline{TP}^2}{\overline{OP'}^2}=\frac{\overline{AP}^2}{\overline{B'P'}^2}=\frac{\overline{OM}^2-\overline{OP}^2}{\overline{OM}^2-\overline{OP'}^2};$$

mais en vertu d'un théorème précédent il vient :

$$\overline{OM}^2=OP\times OT,\quad \text{d'où}\quad OT=\frac{\overline{OM}^2}{\overline{OP}^2},$$

par suite $$OT-OP=\frac{\overline{OM}^2-\overline{OP}^2}{OP},$$

ce qui donne $$TP=\frac{\overline{OM}^2-\overline{OP}^2}{OP};$$

substituant cette valeur de TP dans l'égalité à laquelle on est parvenu, elle devient :

$$\frac{(\overline{OM}^2-\overline{OP}^2)^2}{\overline{OP}^2\times\overline{OP'}^2}=\frac{\overline{OM}^2-\overline{OP}^2}{\overline{OM}^2-\overline{OP'}^2},$$

d'où

$$(\overline{OM}^2-\overline{OP}^2)^2(\overline{OM}^2-\overline{OP'}^2)=(\overline{OM}^2-\overline{OP}^2)\times\overline{OP}^2\times\overline{OP'}^2;$$

simplifiant et effectuant les calculs indiqués, on a :

$$\overline{OM}^4+\overline{OP}^2\times\overline{OP'}^2-\overline{OM}^2(\overline{OP}^2+\overline{OP'}^2)=\overline{OP}^2\times\overline{OP'}^2;$$

réduisant encore, l'égalité se transforme en $\overline{OM}^2=\overline{OP}^2+\overline{OP'}^2$, égalité qui démontre le théorème énoncé.

XIXe Théorème.

188.—Dans une ellipse, la somme des carrés de deux diamètres conjugués est égale à celle des carrés des axes.

Ce théorème a été démontré par le calcul : on va maintenant en donner une démonstration géométrique.

Soient AA', BB' les deux axes, et MM', NN' deux diamètres conjugués quelconques. Il s'agit de prouver que Fig. 125.

Digitized by Google

$$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{NN'}^2.$$

Pour cela menons les ordonnées MK, M'K', N'P', N'P, on a OK' = KM, OP' = NP, en vertu du théorème précédent, il vient :

$$\overline{OA}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OK}^2, \ \overline{OB}^2 = \overline{OK'}^2 + \overline{OP'}^2,$$

d'où on tire :

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OK}^2 + \overline{OK'}^2 + \overline{OP'}^2;$$

mais $\overline{OP}^2 + \overline{OP'}^2 = \overline{ON'}^2$, et $\overline{OK}^2 + \overline{OK'}^2 = \overline{OM}^2$,

donc $$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2,$$

ou $$4\overline{OA}^2 + 4\overline{OB}^2 = 4\overline{OM}^2 + 4\overline{ON}^2,$$

ce qui revient à $\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{NN'}^2$.

Donc la somme des carrés des axes dans l'ellipse est égale à la somme des carrés de deux diamètres conjugués.

XXe Théorème.

189.—Lorsque deux ellipses ont leur axes proportionnels, toutes les droites situées dans l'une d'elles sont proportionnelles aux droites homologues dans l'autre, et les ellipses sont semblables.

Soient les ellipses BDB'D', ACA'C', dont les axes BB', DD' de la première sont proportionnels aux axes AA', CC' de la seconde. Plaçons ces deux courbes de manière que leurs centres coïncident et que leurs axes soient dirigés suivant les mêmes lignes ; alors tirons le diamètre MM', les droites MM', NN' sont homologues, il faut prouver que $\frac{MM'}{NN'} = \frac{BB'}{AA'}$. En effet, sur AA' comme diamètre décrivons une circonférence, ainsi que sur BB', puis ensuite menons les ordonnées MP, NQ, qui coupent les circonférences en m et n, on a alors :

Fig. 126.

$$\frac{mP}{MP} = \frac{OB}{OD'}, \ \frac{NQ}{nQ} = \frac{OC'}{OA};$$

Digitized by Google

mais $\frac{BO}{OD'} = \frac{OA}{OC'}$ par hypothèse, donc

$$\frac{mP}{MP} = \frac{nQ}{NQ}, \text{ d'où on tire } \frac{MP}{NQ} = \frac{mP}{nQ};$$

ce qui prouve que les triangles mOP, nQO sont semblables, d'où il suit que les angles mOP, nOQ sont égaux, et que par suite les points O, n, m, sont en ligne droite. Des triangles semblables mOM, nON, on tire OM : ON :: Om : On, ou MM' : NN' :: BB' : AA'. Donc les lignes MM', NN' sont dans le rapport des axes. Des triangles semblables MOP, NOQ, on tire :

$$\frac{MP}{NQ} = \frac{OP}{OQ} = \frac{MM'}{NN'}.$$

Donc les ordonnées homologues sont proportionnelles, ainsi que les abscisses homologues.

190.—On va démontrer que deux sécantes homologues quelconques sont proportionnelles aux axes. Soient MM', NN' deux sécantes qui sont homologues, parce qu'elles aboutissent à des points homologues situés sur les deux ellipses. Il faut prouver que $\frac{MM'}{NN'} = \frac{BB'}{AA'}$. En effet, les deux triangles MOM', NON' sont semblables, car on a prouvé que $\frac{OM}{ON} = \frac{OM'}{ON'}$. Donc MM', NN' sont parallèles, et les deux triangles MOM', NON' sont semblables; d'après cela, on a : Fig. 127.

$$\frac{MM'}{NN'} = \frac{OM}{ON} = \frac{AA'}{BB'}.$$

Donc, dans deux ellipses où les axes sont proportionnels, les sécantes homologues sont proportionnelles et sont entre elles comme les axes. De telles ellipses sont dites semblables.

XXIe Théorème.

191.—Dans deux ellipses semblables les tangentes homologues sont parallèles. Fig. 127.

Soient BB', DD' les axes de la première ellipse, et AA', CC' ceux

Digitized by Google

$$\frac{QH}{PH'} = \frac{ON'}{OM'}, \quad \frac{N'H}{M'H} = \frac{OQ}{OP};$$

mais on a prouvé que $\frac{ON'}{OM'} = \frac{QO}{OP}$, par conséquent $\frac{QH}{PH'} = \frac{N'H}{M'H}$. Donc les côtés homologues sont proportionnels; ainsi les parallélogrammes construits sur des diamètres homologues sont semblables.

Maintenant on va montrer que les diagonales de deux parallélogrammes se confondent.

Pour cela il suffit de remarquer qu'on a eu précédemment $\frac{N'H}{M'H'} = \frac{ON'}{OM}$, ce qui prouve que les triangles N'OH, M'OH' sont semblables, alors les angles M'OH', N'OH sont égaux; donc les lignes OH, OH' se confondent, et comme elles font partie des diagonales des parallélogrammes construits sur les diamètres conjugués homologues, il est donc démontré que dans les parallélogrammes construits sur les diamètres homologues les diagonales coïncident.

XXIVe Théorème.

Fg. 130. 194.—Les aires de deux ellipses semblables sont comme les rectangles construits sur les axes.

En effet, désignons par a, b, et a', b' les demi-axes des ellipses, et par S, S' leur surface. On démontrera plus tard que $S = \pi ab$, $S' = \pi a'b'$; donc $\frac{S}{S'} = \frac{ab}{a'b'}$, ce qui démontre le théorème énoncé

Les ellipses étant semblables, on a $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$, posons $\frac{b}{a} = K = \frac{b'}{a'}$; on tire de cette égalité $b = aK$, $b' = a'K$; substituant dans ab, et $a'b'$ pour b et b' leurs valeurs, on a

$$ab = a^2K, \; a'b' = a'^2K, \text{ donc } \frac{S}{S'} = \frac{Ka^2}{Ka'^2} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2}.$$

Donc les aires de deux ellipses semblables sont entre elles comme les carrés des axes homologues, ou plus généralement comme les carrés de deux diamètres conjugués homologues.

De la proportion $\frac{S}{S'} = \frac{a^2}{a'^2}$, on déduit que si sur les trois côtés d'un triangle rectangle on construit trois ellipses semblables ayant

Digitized by Google

ces côtés pour grand axe ou pour petit axe, l'aire de l'ellipse construite sur l'hypoténuse sera la somme des aires des ellipses construites sur les autres côtés. En effet, soit ABC un triangle rectangle, désignons par a, a', a'' les côtés AC, CB, BA, puis désignons par S, S', S'' les surfaces des ellipses semblables construites sur a, a', a'' comme grand axe. D'après le théorème précédent on a :

$$S : S' : S'' :: a^2 : a'^2 : a''^2, \text{ d'où } \frac{S}{S'} = \frac{a'^2 + a''^2}{a'^2} = \frac{a^2}{a'^2};$$

les ellipses étant semblables, $K = \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''}$, alors substituant à a, a', a'' leurs valeurs en fonction de b, b', b'' et K, il vient :

$$\frac{S}{S'} = \frac{abK}{a'b'K} = \frac{K(a'b' + a''b'')}{a'b'K} = \frac{a'b' + a''b''}{a'b'};$$

multipliant les deux termes de la fraction $\frac{a'b' + a''b''}{a'b'}$ par π, la dernière égalité donne

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi a'b' + \pi a''b''}{\pi a'b'}.$$

Or $S' = \pi' a'b'$, donc $S = \pi a'b' + \pi a''b'' = S' + S''$. Donc l'ellipse construite sur l'hypoténuse a une surface qui est la somme de celles construites sur les deux autres côtés.

On voit comment étant données deux ellipses semblables, on peut en trouver une troisième semblable aux deux premières, qui soit la somme ou la différence des ellipses données. Étant données deux ellipses semblables, on propose d'en trouver une troisième qui soit moyenne proportionnelle entre les deux données.

Soient a, b les axes de la première, a', b' ceux de la deuxième, a'', b'' ceux de la troisième, désignons par K le rapport constant $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a'}$, $\frac{b''}{a''}$, on a $S = \pi ab = \pi a^2 K$, $S' = \pi a'^2 K$, $S'' = \pi a''^2 K$.

S'' devant être une moyenne proportionnelle entre S et S', il faut qu'on ait $S''^2 = S'S'$, ou $a''^4 = a^2 \times a'^2$; extrayant les racines carrées des deux membres, il vient $a''^2 = a \times a'$; ainsi le grand axe de l'ellipse cherchée est une moyenne proportionnelle entre les grands

Digitized by Google

axes des ellipses données; ayant a'', l'équation $\frac{b''}{a''} = K$ détermine b''. Ainsi la troisième ellipse est trouvée.

Trouver une ellipse qui soit à une autre ellipse semblable donnée dans le rapport de deux lignes M, N; en suivant les mêmes dénominations que ci-dessus, on a $S = \pi ab = \pi a^2 K$, $S' = \pi a'^2 K$; donc $S : S' :: a^2 : a'^2$, mais on doit avoir $M : N :: S : S'$; alors la question est ramenée à trouver une ligne a' telle qu'on ait $M : N :: a^2 : a'^2$; question qu'on sait résoudre. Ayant le grand axe a' de l'ellipse demandée, par l'équation $\frac{b'}{a'} = K$, on en déduira son petit axe.

On voit que toutes les questions à résoudre sur les surfaces des ellipses semblables se ramènent à la résolution de questions de simple géométrie.

XXVe Théorème.

195.—Si dans deux ellipses semblables on mène des rayons vecteurs à des points homologues, les angles qu'on détermine ainsi sont égaux.

Fig. 132. Soient BB', CC' les axes de la première, AA' et DD' ceux de la seconde, F, F' les foyers de la première, et E, E' ceux de la seconde. Prenons les points homologues M, N et joignons-les aux foyers, il faut prouver que les angles FNF' et EME' sont égaux. Pour cela il suffit de faire voir que les lignes ME, NF sont parallèles ainsi que ME', NF'. On a déjà :

$$\frac{OM}{ON} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{a}{a'}.$$

En outre,

$$OF = \sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{1 - K^2},$$

K étant $\frac{b}{a}$; de même, $OE = a'\sqrt{1 - K^2}$; donc

$$\frac{OF}{OE} = \frac{a\sqrt{1 - K^2}}{a'\sqrt{1 - K^2}} = \frac{a}{a'}.$$

De là il suit que $\frac{OM}{ON} = \frac{OF}{OE}$. Donc les lignes ME, NF sont parallèles, ainsi que ME', NF' et les angles FNF', EME' égaux.

Digitized by Google

Hyperbole.

Ier Théorème.

196.—Dans l'hyperbole le carré d'une ordonnée à l'axe transverse est au produit des distances du pied de l'ordonnée aux sommets comme le carré du second axe est au carré du premier. Soient BB′, CC′ les axes de l'hyperbole, et MP une ordonnée, il

faut pro[illegible] inons les

deux fo[illegible] décrivons
une circ[illegible] e centre ;
cette cou[illegible] gnons par
D le m[illegible] a, donc
F′D = D[illegible] F′K étant
deux séc[illegible] l'égalité
F′K × F[illegible]

Mais $\frac{1}{2}$F′[illegible] e même
$\frac{1}{2}$F′H = $\frac{1}{2}$[illegible] l'égalité
précédent[illegible]

de cette p[illegible]

A[illegible]

agissant p[illegible] vement
à $\frac{AF}{AB} = \frac{M}{A}$[illegible]

Digitized by Google

$$\frac{MD + AP + AF + AB}{AF + AB} = \frac{AB + AP}{AB}$$

ou

$$\frac{MD + AP + AF + AB}{AB + AP} = \frac{AF + AB}{AB};$$

remarquons maintenant que $AB + MD = MF'$, $AF + AP = PF'$, $AP + AB = PB'$, alors la proportion devient :

$$\frac{F'B}{AB} = \frac{F'M + F'P}{PB'}.$$

Reprenons la proportion $\frac{AF}{AB} = \frac{MD}{AP}$, on en tire :

$$\frac{AF - AB}{AB} = \frac{MD - AP}{AP} \quad \text{ou} \quad \frac{AF - AB}{MD - AP} = \frac{AB}{AP};$$

de cette dernière on déduit encore :

$$\frac{MD - AP + AB - AF}{AP - AB} = \frac{AF - AB}{AB},$$

proportion qui se réduit à

$$\frac{MF' - F'P}{PB} = \frac{FB}{AB},$$

en remarquant que

$MD + AB = MF'$, $AP + AF = F'P$, $AP - AB = PB$, $AF - AB = FB$.

Multipliant les égalités

$$\frac{F'B}{AB} = \frac{F'M + F'P}{PB'} \quad \text{et} \quad \frac{MF' - F'P}{PB} = \frac{FB}{AB}$$

membre à membre, il vient :

$$\frac{FB \times F'B}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{MF'}^2 - \overline{F'P}^2}{PB' \times PB}.$$

Mais du triangle rectangle MPF' on tire $\overline{MP}^2 = \overline{MF'}^2 - \overline{PF'}^2$. En outre

Digitized by Google

$$FB \times FB = \left(\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} - AB\right)\left(\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} + AB\right) = \overline{AC}^2.$$

Donc la dernière égalité devient :

$$\frac{\overline{MP}^2}{PB \times PB'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2}.$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

Ce théorème se démontre facilement par le calcul, car l'équation de la courbe rapportée à ses axes étant $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, on en tire :

$$\frac{y^2}{x^2 - a^2} = \frac{y^2}{(x+a)(x-a)} = \frac{b^2}{a^2},$$

or $y = MP$, $x = AP$, $b = AC$, $AB = a$, alors on a :

$$\frac{\overline{MP}^2}{(AP + AB)(AP - AB)} = \frac{\overline{MP}^2}{PB \times PB'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2}.$$

Donc, dans l'hyperbole, le carré de l'ordonnée à l'axe transverse est au produit des distances de son pied aux sommets comme le carré du second axe est au carré du premier axe.

IIe Théorème.

197.—On appelle, dans l'hyperbole, paramètre le double de l'ordonnée à l'un des foyers de cette courbe.

Le second axe de l'hyperbole est moyen proportionnel entre le premier axe et le paramètre.

Soient BB', CC' les axes de l'hyperbole et F, F' les deux foyers, désignons par $M'M''$ la double ordonnée au foyer, il faut démontrer que $\overline{CC'}^2 = BB' \times M'M''$. En effet, d'après le théorème précédent, on a : Fig. 132.

$$\frac{\overline{M'F'}^2}{F'B \times F'B'} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2},$$

or on a montré que $F'B \times F'B' = \overline{AC}^2$. Donc $\overline{AC}^4 = \overline{AB}^2 \times \overline{M'F'}^2$,

Digitized by Google

d'où $\overline{AC}^2 = AB \times M'F'$ ou $4\overline{AC}^2 = 2AB \times 2M'F'$; ce qui revient à $\overline{CC'}^2 = BB' \times M'M''$. C'est ce qu'il fallait démontrer. Si on veut démontrer le théorème par le calcul, il faut, dans l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, mettre pour x^2 la valeur $a^2 + b^2$; alors on a $b^2 = ay$ ou $4b^2 = 2a \times 2y$, ce qui donne $\overline{CC'}^2 = M'M'' \times BB'$.

Ce théorème montre qu'étant données deux des trois quantités suivantes, les deux axes et le paramètre de l'hyperbole, on peut toujours déterminer la troisième.

Donc le second axe de l'hyperbole est moyen proportionnel entre le paramètre et l'axe transverse.

III• Théorème.

198.—Le carré d'une ordonnée au second axe est à la somme des carrés du demi-second axe et de la distance du pied de l'ordonnée au centre, comme le carré du premier axe est au carré du second.

Fig. 132. Soit MQ une ordonnée au second axe CC', il faut prouver que

$$\frac{\overline{MQ}^2}{\overline{AQ}^2 + \overline{AC}^2} = \frac{\overline{BB'}^2}{\overline{CC'}^2}.$$

Pour cela remarquons qu'on a :

$$\frac{\overline{MP}^2}{PB \times PB'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2},$$

or $MP = AQ$, $PB \times PB' = \overline{AP}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{MQ}^2 - \overline{AB}^2$, en conséquence il vient :

$$\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{MQ}^2 - \overline{AB}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{MQ}^2 - \overline{AB}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AC}^2}.$$

De cette proportion on déduit :

$$\frac{\overline{MQ}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{AQ}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AC}^2},$$

Digitized by Google

égalité qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\overline{MQ}^2}{\overline{AQ}^2+\overline{AC}^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2},$$

et qui est celle à laquelle il fallait parvenir.

Ce théorème se déduit de l'équation même de l'hyperbole, car on a $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, alors

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}(y^2+a^2), \quad \text{d'où} \quad \frac{x^2}{a^2+y^2}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Or $x=MQ$, $y=AQ$, $a=AB$, $b=AC$; alors

$$\frac{\overline{MQ}^2}{\overline{AQ}^2+\overline{AC}^2}=\frac{\overline{BB'}^2}{\overline{CC'}^2}.$$

Donc, dans l'hyperbole, le carré d'une ordonnée au second axe est à la somme des carrés du demi-second axe et de la distance du pied de l'ordonnée au centre, comme le carré du premier axe est au carré du second axe.

Des théorèmes qu'on vient de démontrer, on déduit une méthode graphique pour décrire une hyperbole, connaissant l'un de ses axes et la position d'un de ses points relativement aux axes.

En effet, supposons qu'on donne le grand axe BB', et le point M de l'hyperbole, de sorte que MP, AP sont connus, il faut déterminer AC. Pour cela remarquons qu'on a : Fig. 132.

$$\frac{\overline{MP}^2}{PB\times PB'}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2};$$

de cette égalité on tire :

$$AC=\frac{AB.MP}{\sqrt{PB\times PB'}},$$

expression qu'on peut facilement construire. En effet, sur $P'P=PB+PB'$ comme diamètre, décrivons une circonférence; au point B menons l'ordonnée BE, on a $\overline{BE}^2=PB\times BP'$, et BP'

Digitized by Google

égalant PB′, il s'ensuit que BE est la valeur de $\sqrt{PB \times PB'}$; maintenant rabattons BE sur BB′ en E′, puis joignons E′ à Q, et par B menons BC parallèle à E′Q, la ligne AC ainsi déterminée est le demi-second axe en vertu de la proportion AB:AE′::AC:AQ, d'où

$$AC = \frac{AQ \times AB}{AE'} = \frac{MP \times AB}{\sqrt{PB \times PB'}}.$$

Supposons qu'on donne le second axe, alors on a :

$$\frac{\overline{MQ}^2}{\overline{AC}^2 + \overline{AQ}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}, \quad \text{d'où on tire} \quad AB = \frac{MQ \times AC}{\sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AQ}^2}}.$$

Pour construire AB, prenons AI = AC, joignons I à Q, on a $CI = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AQ}^2}$, puis prenons QG = MQ, et par le point G tirons une parallèle à AC, le point B où elle coupe l'axe BB′ est le sommet demandé. Car on a QG:QI::AB:AI ; d'où

$$AB = \frac{AI \times QG}{QI} = \frac{AC \times MQ}{\sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AQ}^2}}.$$

Si les données sont des nombres, et qu'il soit demandé que la question soit résolue par le calcul, alors on prend l'équation de la courbe, $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, et on pose MP = β, AP = α ; il vient, le point M étant sur l'hyperbole, $a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 = a^2b^2$. Si c'est le grand axe qui est donné, on a :

$$b = \frac{a\beta}{\sqrt{\alpha^2 - a^2}}.$$

Au contraire, si c'est le second axe, on a de même :

$$a = \frac{b\alpha}{\sqrt{b^2 + \beta^2}}.$$

Digitized by Google

IVe Théorème.

199.— Dans l'hyperbole chacun des demi-axes est moyen proportionnel entre les distances d'un point de la courbe aux asymptotes, ces distances étant comptées sur une parallèle à l'axe dont il s'agit.

Pour le démontrer soient CC′, BB′ les axes d'une hyperbole et AS_1, AS_2, les deux asymptotes; du point Q pris sur la courbe, menons la parallèle QP′ à l'axe CC′, il faut démontrer que $\overline{AC}^2 = QP \times QP'$.

En effet, les triangles rectangles PMA, DBA étant semblables, on a PM : DB :: AM : AB, d'où Fig. 133.

$$\overline{PM}^2 = \frac{\overline{DB}^2 \times \overline{AM}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{AC}^2 \times \overline{AM}^2}{\overline{AB}^2};$$

d'un autre côté, en vertu d'un théorème connu, on a :

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} \times \overline{QM}^2 = MB' \times MB = \overline{AM}^2 - \overline{AB}^2, \text{ ou } \overline{QM}^2 = \frac{\overline{AC}^2(\overline{AM}^2 - \overline{AB}^2)}{\overline{AB}^2},$$

les deux dernières égalités auxquelles on est parvenu, donnent :

$$\frac{\overline{PM}^2}{\overline{QM}^2} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AM}^2 - \overline{AB}^2}.$$

De cette dernière proportion on tire :

$$\frac{\overline{PM}^2 - \overline{QM}^2}{\overline{PM}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AM}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{PM}^2}.$$

Donc $\overline{PM}^2 - \overline{QM}^2 = \overline{AC}^2$, or $\overline{PM}^2 - \overline{QM}^2 = (PM + QM)(PM - QM) = QP \times QP'$. Il s'ensuit qu'on a $QP \times QP' = \overline{AC}^2$; c'est ce qu'il fallait prouver.

Considérons le second cas, celui où la sécante est parallèle au premier axe. Soit QRR′, il faut prouver que $\overline{AB}^2 = QR \times QR'$.

En effet, les triangles RSA et DAB étant semblables, on a :

Digitized by Google

$$RS : AB :: AS : DB, \quad \text{d'où} \quad \overline{RS}^2 = \frac{\overline{AB}^2 \times \overline{AS}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Le point Q étant sur la courbe, on a, en vertu d'un théorème démontré,

$$\frac{\overline{QS}^2}{\overline{AC}^2 + \overline{AS}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2},$$

égalité qu'on peut mettre sous la forme

$$\overline{QS}^2 = \frac{\overline{AB}^2(\overline{AC}^2 + \overline{AS}^2)}{\overline{AC}^2};$$

en conséquence

$$\frac{\overline{QS}^2}{\overline{RS}^2} = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AS}^2}{\overline{AS}^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\overline{QS}^2 - \overline{RS}^2}{\overline{RS}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AS}^2},$$

or $\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{AS}^2} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{RS}^2}$, alors $\dfrac{\overline{QS}^2 - \overline{RS}^2}{\overline{RS}^2} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{RS}^2}$;

ainsi $\overline{QS}^2 - \overline{RS}^2 = (QS + RS)(QS - RS) = QR \times QR' = \overline{AB}^2$. C'est ce qu'il fallait prouver

Par les équations des asymptotes et de l'hyperbole, ce théorème se démontre aisément. En effet l'équation de l'asymptote AS est $y = \frac{b}{a}x$, celle de la courbe est $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, donc

$$\overline{MP}^2 - \overline{QM}^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2 = b^2,$$

ou $\quad (MP + QM)(MP - QM) = QP \times QP' = b^2 = AC^2.$

La seconde partie se démontre de la même manière, car

$$\overline{QS}^2 = x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2), \quad \overline{QR}^2 = \frac{a^2}{b^2}y^2,$$

donc

Digitized by Google

$$\overline{QS}^2 - \overline{QR}^2 = (QS + QR)(QS - QR) = QR \times QR' = \frac{a^2}{b^2} y^2 +$$

$$+ b^2 \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2 = \overline{AB}^2.$$

Donc dans l'hyperbole un des demi-axes est moyen proportionnel entre les distances d'un point de la courbe aux asymptotes, ces distances étant comptées sur la parallèle à l'axe dont il est question.

On vient de prouver que $QP \times QP' = \overline{AC}^2$, que $QR \times QR' = \overline{AB}^2$. Donc les produits $Q \times QP'$, $QR \times QR'$, sont proportionnels aux axes. De l'égalité $QR \times QR' = \overline{AB}^2$, on tire $QR = \frac{\overline{AB}^2}{QR'}$; or à mesure que le point Q s'éloigne du sommet, QR' croît, donc QR décroît, c'est-à-dire que l'asymptote va en se rapprochant de la courbe, plus on s'éloigne du sommet de l'hyperbole.

Ve Théorème.

200.—Si d'un point de l'hyperbole, on mène deux droites terminées à leur intersection avec les asymptotes, et que d'un autre point quelconque pris sur la courbe, on mène deux parallèles aux deux premières, terminées aux points où elles coupent les asymptotes, le produit des deux premières lignes est égal au produit des deux autres.

Soient QR, QP' les deux premières, et EH, EH' les deux autres; il faut prouver que $QR \times QP' = EH \times EH'$. Pour cela par les points Q et E menons les droites MQM', NEN' perpendiculaires à BB' et terminées aux asymptotes. Les triangles qu'on vient ainsi de former MQR, NEH sont semblables, ainsi que les triangles QM'P', EN'H', alors on a : Fig. 134.

$$\frac{QM}{EN} = \frac{QR}{EH} \quad \text{et} \quad \frac{QM'}{EN'} = \frac{QP'}{EH'};$$

multipliant ces égalités membre à membre, il vient :

$$\frac{QM \times QM'}{EN \times EN'} = \frac{QR \times QP'}{EH \times EH'}.$$

Digitized by Google

Mais on a démontré précédemment que

$$QM \times QM' = \overline{AC}^2 = EN \times EN', \quad \text{donc} \quad QR \times RP' = EH \times E'H.$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

Donc si dans une hyperbole on mène d'un point de la courbe deux lignes terminées aux asymptotes, et que d'un autre point quelconque on mène deux parallèles aux premières, terminées encore aux asymptotes, le produit des deux premières est égal au produit des deux secondes.

201.— Le théorème qu'on vient de démontrer s'applique à deux lignes quelconques, en conséquence concevons que les lignes EH, QR tournent autour des points E, Q de manière à coïncider avec les lignes EK, QK', les prolongements de EH', QP', alors on aura :

$$EK \times EH' = QK' \times QP'.$$

Donc les produits des distances de deux points de l'hyperbole aux asymptotes, ces distances comptées sur deux lignes parallèles quelconques, sont égaux.

On peut démontrer ce théorème par le calcul, car prenons pour axes de coordonnées, deux diamètres conjugués, dont l'un soit relatif aux cordes données, l'équation de l'hyperbole est $a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2$, celles des asymptotes sont $y = \pm \frac{b'}{a'} x$. Donc

$$Y^2 - y^2 = (Y+y)(Y-y) = EH' \times EK = \frac{b'^2}{a'^2} x^2 + b'^2 - \frac{b'^2}{a'^2} x^2 = b'^2.$$

Alors $QP' \times QK' = b'^2$. Donc $EK \times EH' = QP' \times QK'$; c'est ce qu'il fallait démontrer. Le calcul démontre en outre que le produit des distances d'un point de l'hyperbole aux asymptotes, comptées sur une ligne quelconque est égal au carré du demi-diamètre conjugué de celui qui passe par le milieu de la ligne en question.

Prenons le point Q' sur la courbe au lieu du point Q, on aura toujours $Q'P' \times Q'K' = EK \times EH'$, d'où $Q'P' \times Q'K' = QP' \times QK'$; or $Q'K' = QP'$, car $QP' = QG + GP'$, $Q'K' = GQ + GK'$, et comme le point G est le milieu de QQ', on sait que $GK' = GP'$, donc $QP' = Q'K'$, alors $Q'P' = QK'$. C'est-à-dire que si on mène une ligne quelconque coupant l'hyperbole en deux points, les parties de la

Digitized by Google

sécante extérieure à la courbe comprises entre les asymptotes et l'hyperbole sont égales. On a déjà démontré ce théorème par le calcul à l'article des asymptotes.

Supposons que l'une des sécantes se meuvent parallèlement à elle-même de manière à ce que les points où elle coupe la courbe se rapprochent l'un de l'autre, lorsqu'ils seront venus à coïncider l'un avec l'autre en D, on aura d'après le théorème précédent $DF = DF'$. Donc les parties d'une tangente comprises entre les asymptotes et son point de contact sont égales. On a démontré que $EK \times EH = b'^2$, donc $\overline{DF}^2 = b'^2$ ou $DF = b'$. Donc la partie d'une tangente comprise entre les asymptotes est égale au diamètre conjugué de celui qui passe en son point de contact. Fig. 134.

202.— De ce que $DF = DF'$, il s'ensuit que pour mener une tangente en un point donné sur l'hyperbole, connaissant les asymptotes, il suffit de mener par le point D, la ligne DI parallèle à l'une des asymptotes AS', puis de prendre $IF = AI$ et de joindre le point F qu'on détermine ainsi au point donné D, et on a dans la ligne DF la tangente demandée.

De ce que $\overline{BF}^2 = EK \times EH = b'^2$, on déduit ce théorème, que le produit des distances d'un point de l'hyperbole à ses asymptotes, distances mesurées sur une sécante quelconque, est égal au carré de la partie de la tangente parallèle à la sécante, comprise entre son point de contact et l'une des asymptotes, ou encore égal au carré du demi-diamètre parallèle à la sécante.

VIe Théorème.

203.— Dans une hyperbole, le carré d'une ordonnée à un diamètre quelconque, est au produit des distances de son pied, aux extrémités du diamètre, comme le carré du diamètre conjugué est au carré de celui dont il s'agit.

Soient BB', CC', deux diamètres conjugués, puis NQ l'ordonnée au diamètre BB', il faut prouver qu'on a : Fig. 135.

$$\frac{\overline{NQ}^2}{QB \times QB'} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2}.$$

Pour cela au point B' menons la tangente B'D, puis prolon-

Digitized by Google

geons NQ jusqu'à la rencontre de l'asymptote AS en M. A cause des triangles semblables DB'A, MQA on a :

$$\frac{\overline{MQ}^2}{\overline{AQ}^2}=\frac{\overline{B'D}^2}{\overline{AB'}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{MQ}^2}{\overline{B'D}^2}=\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{A'B}^2};$$

de là on tire :

$$\frac{\overline{MQ}^2-\overline{B'D}^2}{\overline{B'D}^2}=\frac{\overline{AQ}^2-\overline{AB'}^2}{\overline{AB'}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{MQ}^2-\overline{B'D}^2}{\overline{AQ}^2-\overline{AB'}^2}=\frac{\overline{B'D}^2}{\overline{AB'}^2}.$$

Dans un des théorèmes précédents on a prouvé que

$$\overline{B'D}^2=NM\times NM'=\overline{MQ}^2-\overline{NQ}^2,$$

en conséquence il vient :

$$\overline{QM}^2-\overline{B'D}^2=\overline{MQ}^2-\overline{MQ}^2+\overline{NQ}^2;$$

en outre

$$\overline{AQ}^2-\overline{AB}^2=(AQ+AB)(AQ-AB)=QB\times QB' \text{ et } B'D=AC.$$

Donc l'égalité devient :

$$\frac{\overline{NQ}^2}{QB\times QB'}=\frac{AC}{\overline{AB'}^2}=\frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Si on prend pour axe de coordonnées les deux diamètres conjugués BB', CC', l'équation de la courbe est $a'^2y^2-b'^2x^2=-a'^2b'^2$, d'où

$$\frac{y^2}{x^2-a'^2}=\frac{y^2}{(x+a')(x-a')}=\frac{b'^2}{a'^2}.$$

Or, ici, $y=NQ$, $x=AQ$, $a'=AB$, $b'=AC$; en conséquence le calcul donne :

$$\frac{\overline{NQ}^2}{QB\times AB'}=\frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BB'}^2},$$

résultat qu'il fallait obtenir.

Digitized by Google

Donc, dans une hyperbole l'ordonnée à un diamètre quelconque, est au produit des distances de son pied aux extrémités du diamètre, comme le carré du diamètre conjugué est au carré du diamètre dont il s'agit.

VIIe THÉORÈME.

204. — Une hyperbole peut être construite lorsque deux diamètres conjugués sont connus en grandeur et en position.

Soient BB', CC' les deux diamètres conjugués, au moyen desquels il faut construire la courbe. Pour cela, ramenons le diamètre CC' à être perpendiculaire sur BB'; sur BB' et AA', comme axes traçons une hyperbole, et aux points m, n, p, r, etc., tirons les ordonnées $m\alpha$, $n\beta$, $p\gamma$; cela fait, par les points m, n, p, q, r, menons des parallèles à CC' et sur ces lignes, au moyen d'arcs de cercle, ramenons les points α, β, γ, etc., en α', β', γ', etc. Les points ainsi déterminés appartiennent à l'hyperbole demandée; en effet, les points α, β, γ, satisfont à la condition $a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b^2$; alors les points α', β', γ', leurs coordonnées étant prises par rapport aux diamètres BB', CC', satisferont à la condition $a'^2y^2 - b'^2a^2x = -a'^2b'^2$, puisque les coordonnées des points α, α' sont les mêmes, donc les points α', β', γ' appartiennent à une hyperbole dont BB', CC' sont deux diamètres conjugués, en vertu de ce théorème qu'il n'y a que les points de l'hyperbole pour lesquels $a'^2y'^2 - b'^2x^2 = a'^2b'^2$. Cette question peut être résolue d'une autre manière, en cherchant les longueurs des axes. Désignons par γ l'angle C'OB', puis par a', b' les demi-diamètres AB, AC. On a les relations suivantes entre les quantités a, b, a', b', γ. Fig. 136.

$$(1) \qquad a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2, \qquad (2) \quad ab = a'b' \sin\gamma.$$

Des équations (1), (2), on tire :

$$a^2 = \frac{a'^2 - b'^2 + \sqrt{(a'^2 - b'^2)^2 + 4a'^2b'^2 \sin^2\gamma}}{2},$$

$$b^2 = \frac{-(a'^2 - b'^2) + \sqrt{(a'^2 - b'^2)^2 + 4a'^2b'^2 \sin^2\gamma}}{2}.$$

Ayant les deux axes, il ne reste plus qu'à les fixer de position; pour cela, remarquons que le lieu des pieds des perpendiculaires Fig. 137.

Digitized by Google

abaissées H des foyers sur les tangentes, est une circonférence ayant l'axe transverse pour diamètre, et son centre au même point que celui de la courbe ; en conséquence, décrivons de O comme centre avec a pour rayon une circonférence, et tirons les diagonales du parallélogramme MNPQ, construit sur les diamètres conjugués donnés ; ces lignes sont les asymptotes qu'on sait être des tangentes à l'hyperbole, alors les points I′, I, H, H′ où elles coupent la circonférence, sont les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers. si en ces points on élève aux droites NQ, MP des perpendiculaires, elles vont se couper deux à deux aux points F, F′ qui sont les foyers de l'hyperbole ; conséquemment en les joignant, on aura la direction du premier axe, et par suite celle du second axe.

On doit remarquer que les côtés QM, PN sont des tangentes à l'hyperbole, qui auraient pu comme les asymptotes fixer les foyers. L'hyperbole est donc complétement déterminée, puisqu'on connaît ses axes en grandeur et en direction.

VIIIe Théorème.

205. — On peut construire une hyperbole lorsqu'on donne en position deux diamètres, l'un d'eux en longueur et les coordonnées d'un point de la courbe, par rapport à ces deux diamètres.

Fig. 138. Soient BB′, CC′ les diamètres conjugués, BB′ est celui dont la longueur est donnée ; soit M le point de l'hyperbole dont on donne les coordonnées MP, AP, par rapport aux deux diamètres conjugués BB′, CC′. Il s'agit, avec ces seules données, de construire la courbe. Pour résoudre la question, il suffit de déterminer le second diamètre CC′, et, en vertu du numéro précédent, on pourra construire l'hyperbole.

On a :

$$\frac{\overline{MP}^2}{PB \times PB'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} \quad \text{d'où} \quad \cancel{AB} = \frac{AB \times MP}{\sqrt{PB \times PB'}}; \qquad AC$$

pour construire cette expression, prenons sur le prolongement de B′P, PB″ = PB, puis sur B′B″ décrivons comme diamètre une circonférence, et en P menons l'ordonnée PQ à ce diamètre, on a

$$\overline{PQ}^2 = PB' \times PB'' = PB' \times PB.$$

Digitized by Google

Maintenant, à partir du point A, prenons AM′=PM, sur CC′, ensuite sur BB′, prenons AH = PQ, joignons M′ à H et par le point B′ tirons BC, parallèle à HM′, le point C est l'extrémité du diamètre demandé. Car des triangles semblables M′AH, CAB, on tire :

$$AC : AM' :: AB : AH, \quad \text{d'où} \quad AC = \frac{AM' \times AB}{AH};$$

remplaçant AM′, AH par leurs valeurs, il vient :

$$AC = \frac{MP \times AB}{\sqrt{PB \times PB'}};$$

ainsi on voit que AC est le second diamètre de l'hyperbole. Si les longueurs BB′, AP, MP sont données en nombre et qu'on les désigne par α, β, a', de l'équation $a'^2\beta^2 - b'^2\alpha'^2 = -a'^2b'^2$, on tire :

$$b' = \frac{a'\beta}{\sqrt{\alpha^2 - a'^2}}.$$

Ainsi a', b' sont connus.

Donc une hyperbole est déterminée et peut être construite lorsqu'on donne en position deux diamètres conjugués et la longueur de celui qui coupe la courbe, puis les coordonnées d'un point de cette courbe par rapport aux diamètres donnés.

IXe Théorème.

206. Quand on donne une hyperbole et ses deux asymptotes, on peut tracer deux diamètres conjugués, faisant entre eux un angle donné.

Soient MNP, M′N′P′ les deux branches de l'hyperbole dont AR, AS sont les asymptotes, l'angle donné est VDQ; il s'agit de trouver deux diamètres qui fassent entre eux cet angle. Fig. 139.

Pour cela, sur DV, prenons DV = DX et sur VX, décrivons un segment capable de l'angle SAR′, cet arc de cercle coupera le côté VQ en un point Q, qui, joint aux points D et X, donne les lignes QD, QX. Maintenant, sur AS et AR′, prenons AK, AK′ égaux à QV et à QX, tirons la ligne KK′ et joignons son milieu I au centre A. Les triangles AKK′, QVX sont égaux, car AK = VQ, AK′ = QX et VDX = SAR′ par construction. Donc, KK′ =

Digitized by Google

VX, par suite KI = DV, et les angles AKI, VQD sont égaux; il suit de l'égalité de ces triangles, que les autres triangles KAI, DVQ sont égaux, puisque AK = VQ, DV = KI, et QVD = AKI, donc les angles AIK, VDQ sont égaux; or le diamètre conjugué de AI est parallèle à KK', donc, si du point A on tire CC' parallèle à KK', on a dans les deux diamètres conjugués AH, AC, ceux faisant entre eux l'angle donné.

Xe Théorème.

207. — Si d'un point pris hors d'une hyperbole, on mène une tangente terminée à son point de contact et un diamètre coupant en deux points la courbe, le carré de la tangente est à la différence des carrés du demi-diamètre et de la distance du point donné au centre, comme le carré du diamètre conjugué de celui qui va au point de contact est au carré de celui qui coïncide avec la sécante.

Fig. 140 Soient PQR, P'Q'R' les deux branches d'une hyperbole et M le point hors la courbe, soient MC et EME' la tangente et la sécante passant en M, il faut démontrer que

$$\frac{\overline{MC}^2}{\overline{AE}^2 - \overline{AM}^2} = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{AE}^2}.$$

Menons l'ordonnée EF au diamètre AC, cette ligne est parallèle à MC, alors les triangles MAC, FAE sont semblables, d'où il suit que

$$\frac{\overline{MC}^2}{\overline{EF}^2} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AE}^2} \quad \text{ou} \quad \overline{MC}^2 = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AE}^2} \times \overline{EF}^2 ;$$

d'après un théorème démontré, on a :

$$\overline{EF}^2 = (\overline{AF}^2 - \overline{AC}^2)\frac{\overline{AH}^2}{\overline{AC}^2};$$

mais des triangles semblables MAC, EAF, on tire :

$$\frac{\overline{AF}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{AM}^2}, \quad \text{donc} \quad \frac{\overline{AF}^2 - \overline{AC}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AE}^2 - \overline{AM}^2}{\overline{AM}^2},$$

alors

Digitized by Google

$$\overline{EF}^2 = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{AM}^2}(\overline{AE}^2 - \overline{AM}^2)^2;$$

substituant à $\overline{EF}^2$ sa valeur dans celle de $\overline{MC}^2$, il vient :

$$\overline{MC}^2 = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{AM}^2}(\overline{AE}^2 - \overline{AM}^2) \times \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AE}^2} = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{AE}^2}(\overline{AE}^2 - \overline{AM}^2),$$

et enfin

$$\frac{\overline{MC}^2}{\overline{AE}^2 - \overline{AM}^2} = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{AE}^2}.$$

Donc, si d'un point pris hors l'hyperbole on mène une tangente limitée à son point de contact, et une sécante passant au centre, le carré de la tangente est à la différence des carrés du demi-diamètre et de la distance du point au centre, comme le carré du diamètre conjugué de celui qui passe au point de contact est au carré du diamètre coïncidant avec la sécante.

Ce théorème a son analogue dans l'ellipse. Car

$$\overline{AE}^2 - \overline{AM}^2 = (AE + AM)(AE - AM) = ME \times ME',$$

donc

$$\frac{\overline{MC}^2}{ME \times ME'} = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{AE}^2}.$$

Ce qui donne lieu au théorème suivant :

Si d'un point on mène une tangente à l'hyperbole et un diamètre coupant cette courbe en deux points, le carré de la tangente terminée à son point de contact est au produit des distances du point donné aux extrémités du diamètre, comme le carré du diamètre parallèle à la tangente est au carré du premier.

XIe Théorème.

208.—Si d'un point quelconque on mène deux droites coupant chacune l'hyperbole en deux points, le produit des distances du point donné aux points d'intersection situés sur l'une d'elles est au

Digitized by Google

produit des distances du même point aux points d'intersection situés sur l'autre, comme le carré du diamètre parallèle à la première est au carré du diamètre parallèle à la seconde.

Supposons que le point donné soit en M à l'intérieur de la courbe, soient PMP', QMQ' les deux sécantes et CC', DD' les diamètres qui leur sont parallèles, il faut prouver que

Fig. 141.

$$\frac{MP \times MP'}{MQ \times MQ'} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{DD'}^2}.$$

Pour cela menons les diamètres AK, AK' passant aux milieux I, I' des cordes PP', QQ', et tirons les tangentes en K, K' à la courbe, elles coupent le diamètre AM en m et m'.

Les points I, I' étant milieux de PP' et QQ', on a :

$$MQ \times MQ' = \overline{QI'}^2 - \overline{MI'}^2,\ PM \times MP' = \overline{PI}^2 - \overline{MI}^2;$$

ensuite, en vertu d'un théorème démontré, on a :

$$\frac{\overline{QI'}^2}{\overline{AI'}^2 - \overline{AK'}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AK'}^2},\quad \text{d'où}\quad \overline{QI'}^2 = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AK'}^2}(\overline{AI'}^2 - \overline{AK'}^2);$$

mais des triangles semblables AK'm', AI'M on tire :

$$\frac{AI'}{AK'} = \frac{AM}{Am'},\quad \text{donc}\quad \frac{\overline{AI'}^2 - \overline{AK'}^2}{\overline{AK'}^2} = \frac{\overline{AM}^2 - \overline{Am'}^2}{\overline{Am'}^2},$$

substituant à $\frac{\overline{AI'}^2 - \overline{AK'}^2}{\overline{AK'}^2}$ sa valeur trouvée ci-dessus, celle de $\overline{QI'}^2$ devient :

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{Am'}^2}(\overline{AM}^2 - \overline{Am'}^2).$$

Des triangles semblables qu'on a énoncés, on tire :

Digitized by Google

$$\frac{MI'}{K'm'} = \frac{AM}{Am'}, \quad \text{et par suite} \quad \overline{MI'}^2 = \frac{\overline{K'm'}^2}{\overline{Am'}^2}\,\overline{AM}^2.$$

Maintenant appelons O le point où le diamètre AM coupe l'hyperbole, d'après un théorème démontré, on a :

$$\overline{m'K'}^2 = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AO}^2}\, m'O \times m'O' = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AO}^2}\,(\overline{AO}^2 - \overline{Am'}^2),$$

par conséquent

$$\overline{MI'}^2 = \frac{\overline{AD}^2 \times \overline{AM}^2\,(\overline{AO}^2 - \overline{Am'}^2)}{\overline{AO}^2 \times \overline{Am'}^2}.$$

Des valeurs de $\overline{QI'}^2$, $\overline{MI'}^2$, on tire :

$$\overline{QI'}^2 - \overline{MI'}^2 = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{Am'}^2}(\overline{AM}^2 - \overline{Am'}^2) - \frac{\overline{AD}^2 \times \overline{AM}^2\,(\overline{AO}^2 - \overline{Am'}^2)}{\overline{AO}^2 \times \overline{Am'}^2} =$$

$$\frac{\overline{AD}^2 \times \overline{AO}^2\,(\overline{AM}^2 - \overline{Am'}^2) - \overline{AD}^2 \times \overline{AM}^2\,(\overline{AO}^2 - \overline{Am'}^2)}{\overline{AO}^2 \times \overline{Am'}^2}.$$

Effectuant les calculs indiqués et simplifiant, le second membre de l'égalité devient :

$$\overline{QI'}^2 - \overline{M'I}^2 = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AO}^2}(\overline{AM}^2 - \overline{AO}^2),$$

alors on a :

$$MQ \times MQ' = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AO}^2}(\overline{AM}^2 - \overline{AO}^2).$$

Par les mêmes raisonnements on arriverait à

$$MP \times MP' = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AO}^2}(\overline{AM}^2 - \overline{AO}^2),$$

d'où il suit que

Digitized by Google

$$\frac{MQ \times MQ'}{MP \times MP'} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{DD'}^2}{\overline{CC'}^2};$$

c'est ce qu'il fallait prouver.

La démonstration qu'on vient d'exposer n'a rien supposé sur la position des sécantes, si ce n'est que leur point de concours est à l'intérieur de l'hyperbole ; par conséquent on a comme ci-dessus :

$$\frac{MP' \times MP'}{ME \times ME'} = \frac{\overline{CC'}^2}{\overline{TT'}^2}.$$

Fig. 142. 209. — Supposons le point de concours extérieur à l'hyperbole en M, soient MD', ME' les deux sécantes auxquelles sont parallèles les diamètres BB', AA', il s'agit de prouver que

$$\frac{MD \times MD'}{ME \times ME'} = \frac{\overline{BB'}^2}{\overline{AA'}^2}.$$

Pour cela, prenons le milieu de DD' et joignons-le au centre A. la ligne AI coupe la courbe en m, et si, en ce point, on mène mC tangente à l'hyperbole, les triangles COm, MOI sont semblables Cherchons l'expression de $MD \times MD' = \overline{MI}^2 - \overline{DI}^2$.

Des triangles semblables COm, MOI on tire :

$$\frac{MI}{Cm} = \frac{OM}{OC}, \quad \text{donc} \quad \overline{MI}^2 = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OC}^2} \overline{Cm}^2.$$

Maintenant remarquons que le diamètre, OM, ne coupant pas l'hyperbole donnée, coupe la conjuguée ; alors, en vertu d'un théorème qu'on démontrera plus tard, on a :

$$\overline{CM}^2 = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OH}^2}(\overline{OH}^2 + \overline{OC}^2);$$

substituant cette valeur de $\overline{Cm}^2$ dans celle de $\overline{MI}^2$, il vient :

$$\overline{MI}^2 = \frac{\overline{OM}^2 \times \overline{OB}^2}{\overline{OC}^2 \times \overline{OH}^2}(\overline{OH}^2 + \overline{OC}^2).$$

Digitized by Google

Cherchons la valeur de $\overline{DI}^2$. On sait que

$$\overline{DI}^2 = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{Om}^2}(\overline{OI}^2 - \overline{Om}^2),$$

mais des triangles semblables IOM, mOC on tire :

$$\frac{\overline{OI}^2}{\overline{Om}^2} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OC}^2}, \quad \text{ce qui donne} \quad \frac{\overline{OI}^2 - \overline{Om}^2}{\overline{Om}^2} = \frac{\overline{OM}^2 - \overline{OC}^2}{\overline{OC}^2};$$

par conséquent

$$\overline{DI}^2 = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OC}^2}(\overline{OM}^2 - \overline{OC}^2).$$

Substituant les valeurs de DI, MI dans celle du produit MD × MD′, il vient :

$$MD \times MD' = \overline{MI}^2 - \overline{DI}^2 = \frac{\overline{OM}^2 \times \overline{OB}^2}{\overline{OC}^2 \times \overline{OH}^2}(\overline{OH}^2 + \overline{OC}^2) - \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OC}^2}(\overline{OM}^2 - \overline{OC}^2) =$$

$$= \frac{\overline{OM}^2 \times \overline{OB}^2(\overline{OH}^2 + \overline{OC}^2) - \overline{OB}^2 \times \overline{OH}^2(\overline{OM}^2 - \overline{OC}^2)}{\overline{OC}^2 \times \overline{OH}^2};$$

effectuant les calculs indiqués et simplifiant, on trouve :

$$MD \times MD' = \frac{\overline{OB}^2 \times \overline{OH}^2}{\overline{OC}^2}(\overline{OM}^2 + \overline{OH}^2).$$

On trouverait de même :

$$ME \times ME' = \frac{\overline{OA}^2 \times \overline{OH}^2}{\overline{OC}^2}(\overline{OM}^2 + \overline{OH}^2).$$

Par conséquent

$$\frac{MD \times MD'}{ME \times ME'} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OA}^2} = \frac{\overline{BB'}^2}{\overline{AA'}^2}.$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

Digitized by Google

Ainsi on voit que le théorème s'applique à deux sécantes quelque soit leur point de concours.

210. —Supposons que l'une des sécantes devienne tangente; soit Cm cette ligne, et CG la sécante, on aura toujours :

$$\frac{\overline{Cm}^2}{CG \times CG'} = \frac{\overline{BB'}^2}{\overline{AA'}^2};$$

pour une autre sécante passant par le point C on aura :

$$\frac{\overline{Cm}^2}{CQ \times CQ'} = \frac{\overline{BB'}^2}{\overline{RR'}^2}.$$

Donc $$CQ \times CQ' : CG \times CG' :: \overline{RR'}^2 : \overline{AA'}^2.$$

Théorème qui s'énonce ainsi : Si d'un point on tire une sériede sécantes coupant l'hyperbole en deux points, les produits $CG \times CG'$, $CQ \times CQ'$, $CK \times CK'$ sontp roportionnels aux carrés des diamètres parallèles à ces sécantes.

211. — Si on fait mouvoir la seconde sécante de manière à devenir tangente, on aura :

$$\frac{\overline{Lm}^2}{\overline{Lp}^2} = \frac{\overline{BB'}^2}{\overline{AA'}^2} = \frac{MD \times MD'}{ME \times ME'}.$$

Donc si on tire deux tangentes à l'hyperbole non parallèles, et qu'on les termine à leur point de contact et à leur point de concours, le rapport de leur carré est égal à celui des produits formés par les distances d'un point à l'hyperbole, mesurées sur une parallèle à l'une des tangentes, et par les distances du même point à l'hyperbole, comptées sur une parallèle à la seconde tangente.

On a omis de définir deux hyperboles conjuguées. Deux hyperboles sont dites conjuguées lorsquelles ont même centre, que leurs axes coïncident; mais le premier axe de l'une étant l'axe transverse de l'autre, et le second de la première étant l'axe transverse de la seconde hyperbole. On démontrera plus tard quelques propriétés existant entre ces deux courbes.

Digitized by Google

XIIe THÉORÈME.

212. — Si du point de contact d'une tangente on mène une ordonnée à un diamètre quelconque, la moitié de ce diamètre est moyenne proportionnelle entre les distances du centre au pied de l'ordonnée et au point où la tangente coupe le diamètre.

Soient MT une tangente à l'hyperbole en M, et MP l'ordonnée du point de contact relative au diamètre AB, il faut prouver que $\overline{AB}^2 = AP \times AT$. Tirons le diamètre AM et la corde BB′ parallèle à MT; soient O le point d'intersection des lignes MQ, BB′, et H le point où AM coupe BB′. D'après le théorème précédent, on a : Fig. 143.

$$\frac{OQ \times OM}{OB \times OB'} = \frac{\overline{IB}^2}{\overline{IM}^2} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OB}^2},$$

donc

$$\frac{OQ}{OB'} = \frac{OM}{OB} \quad \text{ou} \quad \frac{OQ}{OM} = \frac{OB'}{OB};$$

de cette proportion on tire :

$$\frac{OQ + OM}{OM} = \frac{OB' + OB}{OB}, \text{ or } OQ + OM = 2MP,\ OB' + OB = 2BH,$$

en conséquence il vient $\frac{MP}{OM} = \frac{BH}{OB}$, ce qui prouve que les lignes PH, MB sont parallèles.

Les lignes MT, BH étant parallèles, on a $\frac{AB}{AT} = \frac{AH}{AM}$, mais $\frac{AH}{AM} = \frac{AP}{AB}$ en vertu du parallélisme des lignes MB, PH, donc $\frac{AB}{AT} = \frac{AP}{AB}$; ce qui donne $\overline{AB}^2 = AP \times AT$. C'est ce qu'il fallait prouver.

Prenons le cas où l'ordonnée ne coupe pas la courbe. Ainsi soit l'ordonnée MS au diamètre Ay conjugué de HB, soit T′ le point où la tangente en M coupe Ay, il faut prouver que $\overline{AC}^2 = AT' \times AS$.

Pour cela, remarquons que les triangles TT′A, MTP sont semblables, donc

Digitized by Google

$$\frac{AT'}{MP} = \frac{AT}{TP}, \quad \text{d'où} \quad AT' = \frac{AT}{TP} \times MP;$$

mais on vient de prouver que $AT = \frac{\overline{AB}^2}{AP}$,

donc

$$TP = AP - AT = AP - \frac{\overline{AB}^2}{AP} = \frac{\overline{AP}^2 - \overline{AB}^2}{AP};$$

par suite

$$AT' = \frac{AT \times AP \times MP}{\overline{AP}^2 - \overline{AB}^2}, \quad \text{or} \quad AT \times AP = \overline{AB}^2,$$

donc

$$AT' = \frac{MP \times \overline{AB}^2}{\overline{AP}^2 - \overline{AB}^2} = \frac{AS \times \overline{AB}^2}{\overline{AP}^2 - \overline{AB}^2}.$$

En vertu d'un théorème démontré, on a :

$$\frac{\overline{MS}^2}{\overline{AS}^2 + \overline{AC}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}, \quad \text{d'où} \quad \overline{MS}^2 = \frac{\overline{AB}^2 (\overline{AS}^2 + \overline{AC}^2)}{\overline{AC}^2};$$

maintenant remarquons que $AP = MS$, et substituant dans AT' à $\overline{AP}^2$ sa valeur, il vient :

$$AT' = \frac{\overline{AB}^2 \times AS \times \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2 (\overline{AS}^2 + \overline{AC}^2) - \overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2} =$$

$$= \frac{\overline{AB}^2 \times AS \times \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2 \times \overline{AS}^2 + \overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{AS},$$

ce qui donne $\overline{AC}^2 = AT' \times AS$.

Donc si du point de contact d'une tangente on mène une ordonnée à un diamètre quelconque, la moitié de ce diamètre est moyenne proportionnelle entre les distances du centre au pied de l'ordonnée et au point où la tangente coupe le diamètre.

A l'aide du calcul, on démontre facilement le théorème précé-

Digitized by Google

dent. En effet, prenons pour axes de coordonnées les deux diamètres conjugués AB, BC, et posons $AP = x'$, $MP = y'$. L'équation de la tangente en M est $a'^2yy' - b'^2xx' = -a'^2b'^2$. Le point T s'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation précédente; alors on a $xx' = AT \times AP = a'^2 = \overline{AB}^2$. En faisant $x = 0$ on obtient T', et il vient $yy' = -b'^2$. Il faut remarquer que yy' est négatif parce que y et y' sont toujours de signe contraire; alors pour avoir l'aire du rectangle formé par ces deux coordonnées, il faut les prendre, abstraction faite de leur signe; en conséquence on a :

$$yy' = AT' \times AS = b'^2 = \overline{AC}^2.$$

Ainsi est démontré le théorème dans toute sa généralité.

XIIIe Théorème.

213.—Si de deux points situés aux extrémités de deux diamètres conjugués, on mène des ordonnées à un diamètre quelconque, le carré de la moitié de ce diamètre sera la différence des carrés des distances du centre aux pieds des ordonnées.

Soient DD', CC' deux diamètres conjugués; de leurs extrémités D', C menons les ordonnées D'P, CQ au diamètre quelconque AA'. Il s'agit de prouver que $\overline{OA}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2$.

En effet, on a :

$$\overline{CQ}^2 = \frac{\overline{OE}^2}{\overline{OA}^2}(\overline{OQ}^2 - \overline{OA}^2) \quad \text{et} \quad \overline{D'P}^2 = \frac{\overline{OE}^2}{\overline{OA}^2}(\overline{OA}^2 + \overline{OP}^2),$$

par conséquent
$$\frac{\overline{CQ}^2}{\overline{D'P}^2} = \frac{\overline{OQ}^2 - \overline{OA}^2}{\overline{OA}^2 + \overline{OP}^2}.$$

Au point C tirons la tangente CK, elle est parallèle à DD'; alors les triangles D'OP, CKQ sont semblables, et il vient : Fig. 144.

$$\frac{\overline{CQ}^2}{\overline{D'P}^2} = \frac{\overline{KQ}^2}{\overline{OP}^2};$$

mais
$$KQ = OQ - OK = OQ - \frac{\overline{OA}^2}{OQ} = \frac{\overline{OQ}^2 - \overline{OA}^2}{OQ}.$$

Digitized by Google

Substituant à KQ sa valeur dans l'égalité précédente, il vient :

$$\frac{\overline{CQ}^2}{\overline{D'P}^2} = \frac{(\overline{OQ}^2 - \overline{OA}^2)^2}{\overline{OP}^2 \times \overline{OQ}^2} = \frac{\overline{OQ}^2 - \overline{OA}^2}{\overline{OA}^2 + \overline{OP}^2}.$$

Simplifiant, on a :

$$(\overline{OQ}^2 - \overline{OA}^2)\ (\overline{OA}^2 + \overline{OP}^2) = \overline{OP}^2 \times \overline{OQ}^2,$$

ce qui donne en effectuant les calculs :

$$\overline{OQ}^2 \times \overline{OA}^2 + \overline{OP}^2 \times \overline{OQ}^2 - \overline{OA}^4 - \overline{OA}^2 \times \overline{OP}^2 = \overline{OP}^2 \times \overline{OQ}^2,$$

ou enfin $$\overline{OA}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2.$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

Donc si des extrémités de deux diamètres conjugués dans une hyperbole, on mène deux ordonnées à un diamètre quelconque, le carré de ce demi-diamètre est équivalent à la différence des carrés des distances du centre aux pieds des ordonnées.

XIVe Théorème.

214.—Dans une hyperbole, la différence entre les carrés de deux demi-diamètres conjugués est égale à celle entre les carrés des demi-axes.

Ce théorème a été démontré par le calcul ; on va maintenant en donner une démonstration géométrique.

Fig. 145. Soient BB', MM' les deux axes, et AA', NN' les deux diamètres conjugués. En vertu du théorème précédent, on a :

$$\overline{OM}^2 = \overline{Oq}^2 - \overline{Op}^2 \quad \text{et} \quad \overline{OB}^2 = \overline{Op'}^2 - \overline{Oq'}^2,$$

alors

$$\overline{OB}^2 - \overline{OM}^2 = \overline{Oq}^2 - \overline{Op}^2 - \overline{Op'}^2 + \overline{Oq'}^2 = \overline{Oq}^2 + \overline{Oq'}^2 - (\overline{Op}^2 + \overline{Op'}^2).$$

Mais BB', MM' étant les axes, les triangles rectangles OqN, Op'A donnent :

Digitized by Google

$$\overline{ON}^2 = \overline{Oq}^2 + \overline{Nq}^2 = \overline{Oq}^2 + \overline{Oq'}^2, \quad \overline{OA}^2 = \overline{Op}^2 + \overline{Op'}^2.$$

Donc

$$\overline{ON}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{Oq}^2 + \overline{Oq'}^2 - (\overline{Op}^2 + \overline{Op'}^2) = \overline{OB}^2 - \overline{OM}^2,$$

ou

$$4\overline{ON}^2 - 4\overline{OA}^2 = 4\overline{OB}^2 - 4\overline{OM}^2,$$

ce qui revient à $\overline{BB'}^2 - \overline{MM'}^2 = \overline{NN'}^2 - \overline{AA'}^2$.

Donc dans toute hyperbole la différence des carrés de deux diamètres conjugués est égale à celle des carrés des axes.

XVe Théorème.

215.—Deux hyperboles qui ont leur centre au même point, leurs axes proportionnels et sur les mêmes lignes, ont leur paramètre dans le rapport de leurs axes homologues.

Soient deux hyperboles ayant leur centre au même point O, et leurs axes proportionnels, ainsi $\frac{AA'}{BB'} = \frac{CC'}{DD'}$; il faut prouver que leurs paramètres 2FM, $2F_1M_1$ sont entre eux comme les axes correspondants.

En effet, on sait que $\overline{OC}^2 = OA \times FM$, $\overline{OD}^2 = OB \times F_1M_1$;

alors

$$\frac{\overline{OC}^2}{\overline{OD}^2} = \frac{OA}{OB} \times \frac{FM}{F_1M_1},$$

mais, par hypothèse,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}, \quad \text{donc} \quad \frac{2FM}{2F_1M_1} = \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD},$$

résultat qu'il fallait obtenir.

On arrive à la même conclusion par la combinaison des équations des courbes et de celles des foyers. Pour la première courbe on a Fig. 146.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \quad x = AF = \sqrt{a^2 + b^2},$$

et à l'abcisse AF correspond l'ordonnée FM. Donc

Digitized by Google

$$y^2 = \overline{FM}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 + b^2 - a^2) = \frac{b^4}{a^2}.$$

La seconde hyperbole ayant pour équation $y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(x^2 - a'^2)$ donnerait comme la première $y^2 = \overline{F_1M_1}^2 = \frac{b'^4}{a'^2}$.

Donc
$$\frac{FM}{F''M''} = \frac{b^2a'}{b'^2a};$$

or, puisque les courbes sont semblables, $\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$,

donc aussi,
$$\frac{FM}{F_1M_1} = \frac{b}{b'}.$$

Les équations des foyers étant

$$x = OF = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}, \quad OF_1 = a'\sqrt{1 + \frac{b'^2}{a'^2}},$$

on a :
$$\frac{OF}{OF_1} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{OA}{OB}.$$

On conclut de ce théorème que les points O, M, M_1 sont sur une même ligne droite. Les foyers F', F'_1 jouissant de la même propriété, les points M, M', M_1, M'_1 sont sur un même diamètre.

Les deux triangles semblables MOF, M_1OF_1 donnent

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{FM}{F_1M_1} = \frac{OA}{OB}, \text{ d'où } \frac{MM'}{M_1'M_1'} = \frac{OA}{OB}.$$

Les deux diamètres OM, OM_1, qui sont également inclinés sur l'axe transverse, sont dits homologues, et les points M, M_1, puis M', M'_1 ont la même dénomination.

216. — On vient de prouver que les diamètres allant aux extrémités des ordonnées qui passent aux foyers sont proportionnels aux axes; on va maintenant démontrer que cette propriété est commune à tous les diamètres homologues.

Digitized by Google

Soient NN', N_1N_1' deux diamètres homologues; tirons les ordonnées NP, N_1P_1 des points N_1N_1, on a : Fig. 146.

$$\frac{\overline{NP}^2}{\overline{OC}^2}=\frac{AP\times A'P}{\overline{OA}^2}=\frac{(OP+OA)\,(OP-OA)}{\overline{OA}^2}=\frac{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}{\overline{OA}^2}.$$

On tirerait de même de l'autre hyperbole :

$$\frac{\overline{N_1P_1}^2}{\overline{OD}^2}=\frac{\overline{OP_1}^2-\overline{OB}^2}{\overline{OB}^2}.$$

Divisons les deux dernières égalités membre à membre, il vient :

$$\frac{\overline{NP}^2}{\overline{N_1P_1}^2}=\frac{\overline{OC}^2\times\overline{OB}^2\,(\overline{OP}^2-\overline{OA}^2)}{\overline{OD}^2\times\overline{OA}^2\,(\overline{OP_1}^2-\overline{OB}^2)},$$

égalité qui se réduit à

$$\frac{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}{\overline{OP_1}^2-\overline{OB}^2},\quad \text{puisque}\quad \frac{OC}{OD}=\frac{OA}{OB}$$

par hypothèse. Des triangles semblables NOP, N_1OP_1, on tire

$\frac{OP}{OP_1}=\frac{NP}{N_1P_1}$, en conséquence on a :

$$\frac{\overline{NP}^2}{\overline{N_1P_1}^2}=\frac{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}{\overline{OP_1}^2-\overline{OB}^2}=\frac{\overline{OP}^2}{\overline{OP_1}^2}.$$

Réduisant tous les termes au même dénominateur, et le supprimant, il vient :

$$\overline{OP}^2\times\overline{OP_1}^2-\overline{OA}^2\times\overline{OP_1}^2=\overline{OP}^2\times\overline{OP_1}^2-\overline{OP}^2\times\overline{OB}^2,$$

d'où
$$\frac{\overline{OP}^2}{\overline{OP_1}^2}=\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2}=\frac{\overline{ON}^2}{\overline{ON_1}^2}.$$

Ainsi
$$\frac{NN'}{N_1N_1'}=\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{NP}{N_1P_1}=\frac{OP}{OP_1}.$$

Digitized by Google

Donc deux diamètres homologues sont dans le rapport des axes, ainsi que les coordonnées de deux points homologues.

Les hyperboles rapportées à leurs axes ont pour équations :

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \quad y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(x^2 - a'^2).$$

Les diamètres ON, ON_1 ont des carrés qui ont pour valeurs

$$ON = y'^2 + x'^2 = x'^2 + \frac{b^2}{a^2}x' - b^2 = x'^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) - b^2,$$

$$\overline{ON_1}^2 = x''^2\left(1 + \frac{b'^2}{a'^2}\right) - b'^2.$$

Posant $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = K$, on a :

$$\frac{\overline{ON}^2}{\overline{ON_1}^2} = \frac{x'^2(1 + K^2) - b^2}{x''^2(1 + K^2) - b'^2}.$$

Les triangles semblables NOP, N_1OP_1 donnant $\frac{ON}{ON_1} = \frac{x'}{x''}$, l'égalité précédente devient :

$$\frac{x'^2}{x''^2} = \frac{x'^2(1 + K^2) - b^2}{x''^2(1 + K^2) - b'^2}.$$

Simplifiant, on a :

$$b'^2x'^2 = b^2x''^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{b}{b'} = \frac{x'}{x''}.$$

Ce qui prouve que $\frac{ON}{ON_1} = \frac{OA}{OB}$.

Donc deux diamètres homologues quelconques sont entre eux comme les axes homologues.

Deux sécantes homologues sont entre elles comme les axes.

Soient les deux sécantes homologues N'G', $N_1'H'$ terminées aux points N', N'_1 et G', H'. Il faut prouver que $\frac{N'G'}{N_1'H'} = \frac{OC}{OD}$. En effet, tirons les diamètres ON_1', OH' ; d'après l'article qui précède,

$$\frac{OC}{OD} = \frac{ON'}{ON_1'} = \frac{OG'}{OH'},$$

Digitized by Google

donc les lignes N'G', $N_{,}'H'$ sont parallèles. Alors de la similitude des triangles N'OG', $N_{,}'OH'$ on déduit $\frac{N'G'}{N_{,}'H'} = \frac{OG'}{OH'} = \frac{OC}{OD}$. De même pour les deux sécantes homologues M'G', $M_{,}'H'$, on a $\frac{M'G'}{M''H'} = \frac{OC}{OD}$.

Donc deux hyperboles qui ont leurs axes proportionnels ont toutes les sécantes homologues qu'on peut y tracer dans le rapport de ces axes. Si les deux courbes ont même centre et leurs axes homologues sur les mêmes droites, elles sont semblablement disposées, et leur centre est dit centre de similitude; dans cette position, les sécantes homologues sont parallèles. Deux hyperboles jouissant de la propriété d'avoir leurs axes homologues proportionnels sont dites semblables.

XVIe Théorème.

217.—Deux hyperboles dont les centres sont au même point, dont les axes sont proportionnels et dirigés suivant les mêmes lignes, ont mêmes asymptotes.

Soient AA', BB' les axes de la première courbe, CC', DD' ceux de la seconde, on a par hypothèse $\frac{BB'}{AA'} = \frac{DD'}{CC'}$. Les asymptotes de la première hyperbole s'obtiennent en construisant les triangles rectangles OAK, OAK', dans lesquels AK = AK' = OB; et en leurs hypoténuses OK, OK' on a les lignes cherchées. Celles de la seconde s'obtiennent en construisant semblablement les triangles rectangles OCH, OCH', dans lesquels CH = CH' = OD, les hypoténuses OH, OH' sont les asymptotes. Mais, en vertu de l'hypothèse, $\frac{CH}{OC} = \frac{AK}{OA}$, il s'ensuit que les triangles OAK, OCH sont semblables, donc les angles KOA, HOC sont égaux, et par suite les asymptotes OK, OH coïncident, de même que les deux autres, OK', OH. Donc deux hyperboles semblables ont mêmes asymptotes. Fig. 147.

Réciproquement, admettons que les deux hyperboles disposées comme la figure l'indique, aient mêmes asymptotes OH, OH', alors les triangles OAK, OCH sont semblables, et en conséquence

$$\frac{AK}{CH} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}.$$

Digitized by Google

Donc deux hyperboles ayant mêmes asymptotes sont semblables.

Des sommets A′, C′ menons les parallèles C′P, A′Q à l'une des asymptotes OH. Ces lignes doivent passer aux points D, B extrémités des seconds axes des hyperboles ; car si on joint directement D à B et B à A′, les triangles formés DC′O, HOC sont égaux, puisque OC = OC′, OD = CH. Donc les lignes C′D, OH sont parallèles, de même AB est parallèle à OK. Du triangle rectangle C′OD on tire $\overline{C'D}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OC'}^2$, or C′D = 2C′P, donc $4\overline{C'P}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OC}^2$, d'où

$$\overline{C'P}^2 = \frac{\overline{OD}^2 + \overline{OC}^2}{4}.$$

Ainsi $\overline{C'P}^2$ est la puissance de l'hyperbole dont C, C′ sont les sommets. On a de même $\overline{A'Q}^2$ pour la puissance de la seconde courbe ; des triangles semblables OQA, OPC′ on déduit :

$$\frac{\overline{A'Q}^2}{\overline{C'P}^2} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OC}^2}.$$

Donc les puissances de deux hyperboles semblables sont entre elles comme les carrés des axes homologues..

La démonstration de ce théorème par le calcul est la suivante :

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}, \quad \text{donc} \quad \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{a'^2 + b'^2}{a'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{1}{4}(a^2 + b^2)}{\frac{1}{4}(a'^2 + b'^2)} = \frac{a^2}{a'^2},$$

expression qui devient, en mettant pour $(a^2 + b^2)$ et $(a'^2 + b'^2)$ leurs valeurs,

$$\frac{\overline{A'Q}^2}{\overline{C'P}^2} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OC}^2}.$$

218.—Si deux hyperboles semblables sont rapportées à leurs asymptotes, les ordonnées qui correspondent à la même abscisse sont entre elles comme les puissances des courbes.

Soient G, G′ deux points correspondants à la même abscisse OL, il faut prouver que

$$\frac{GL}{G'L} = \frac{\overline{C'P}^2}{\overline{A'Q}^2}.$$

Digitized by Google

En effet, en vertu d'un théorème démontré,

$$G'L \times G'T = A'Q \times A'Q', \quad \text{or} \quad A'Q = A'Q', \quad \text{donc} \quad G'L = \frac{\overline{A'Q}^2}{G'T}.$$

On a de même pour la seconde

$$GL = \frac{\overline{C'P}^2}{G'T}. \quad \text{Donc} \quad \frac{GL}{G'L} = \frac{\overline{C'P}^2}{\overline{A'Q}^2}.$$

Donc les ordonnées correspondant à la même abscisse sont entre elles comme les puissances des hyperboles.

Démontrons ce théorème par le calcul. Les équations des courbes rapportées à leurs asymptotes sont :

$$x'y' = \frac{a^2 + b^2}{4}, \quad x''y'' = \frac{a'^2 + b'^2}{4}.$$

Faisant $x' = x''$, on a :

$$\frac{y'}{y''} = \frac{\frac{1}{4}(a^2 + b^2)}{\frac{1}{4}(a'^2 + b'^2)} = \frac{\overline{A'Q}^2}{\overline{C'P}^2}.$$

Donc deux hyperboles semblables rapportées à leurs asymptotes ont les ordonnées correspondant à la même abscisse dans le rapport de leur puissance.

XVIIe Théorème.

219.—Deux hyperboles semblables ont les tangentes homologues parallèles.

Soient AA', BB' les axes de la première, et CC', DD' ceux de la seconde. Désignons par $NT_{,}$, MT' deux tangentes aux points homologues M et N, il faut montrer que ces deux lignes sont parallèles. A cet effet, tirons les ordonnées NP, MQ des points de contact. D'après un théorème démontré, on a : Fig. 147.

$$\overline{OA}^2 = OP \times OT, \quad \text{et} \quad \overline{OC}^2 = OQ \times OT',$$

en conséquence

Digitized by Google

$$\frac{OT_1 \times OP}{OT' \times OQ} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OC}^2}.$$

Les points M, N étant homologues, $\frac{OP}{OQ} = \frac{OA}{OC}$; alors l'égalité précédente se réduit à $\frac{OT_1}{OT'} = \frac{OA}{OC}$, ce qui prouve que les triangles NOT, MOT' sont semblables, puisque $\frac{OT_1}{OT'} = \frac{OA}{OC} = \frac{ON}{OM}$, et que par suite les tangentes sont parallèles.

Maintenant prenons les équations des tangentes en M et N, elles sont :

$$y = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} x - \frac{b^2}{y'}, \quad y = \frac{b'^2 x''}{a'^2 y''} x - \frac{b'^2}{y''}.$$

Pour que ces lignes soient parallèles, il faut que les coefficients de x soient égaux, c'est-à-dire que

$$\frac{b'^2}{a'^2} \frac{x''}{y''} = \frac{b^2}{a^2} \frac{x'}{y'};$$

mais l'hypothèse est que

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x''}{y''} \text{ et } \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a},$$

les points M, N étant homologues et les courbes semblables. Donc la condition du parallélisme est remplie. On voit que si seulement $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$ les tangentes ne sont pas parallèles, il faut en outre $\frac{x'}{y'} = \frac{x''}{y''}$, c'est-à-dire qu'il faut que les points de contact soient homologues. Donc dans deux hyperboles semblables il n'y a qu'aux points homologues que les tangentes soient parallèles.

Du théorème qu'on vient de démontrer, il résulte que les normales aux points homologues sont parallèles dans deux hyperboles semblables.

Hyperboles conjuguées.

220.—On appelle hyperboles conjuguées deux hyperboles ayant

Digitized by Google

même centre, dont l'une a pour premier axe l'axe non transverse de l'autre, et pour second axe l'axe transverse de la seconde.

XVIIIe Théorème.

221.—Deux hyperboles conjuguées ont mêmes asymptotes.

Soient (MAP, M'A'P') une hyperbole dont AA', BB' sont les axes, et (QBR, Q'B'R') une seconde hyperbole dont BB', AA' sont les axes. Il faut prouver que ces deux hyperboles ont mêmes asymptotes.

Pour construire celles de la première, formons les triangles rectangles OAD, OAD', tels que AD = AD' = OB, les hypoténuses sont les asymptotes demandées. Construisant de même les triangles rectangles en B, de telle sorte qu'ils aient OB pour côté commun, et les deux autres côtés de l'angle droit égaux à OA, les hypoténuses de ces triangles sont les asymptotes de l'hyperbole (QBR, Q'B'R'). Fig. 148.

Les triangles qu'on vient de construire pour chaque courbe forment évidemment l'une des deux parties du rectangle construit sur les axes OA, OB, formées par ses diagonales. Donc les asymptotes des deux hyperboles sont les mêmes, et se confondent avec les diagonales du rectangle construit sur les axes.

222.—De ce que deux hyperboles conjuguées ont mêmes asymptotes, il s'ensuit qu'elles ont même puissance. Car joignons A' à B, la ligne A'B est parallèle à OD', donc $\overline{A'K'}^2$ est la puissance de la première, et $\overline{BK'}^2$ celle de la seconde, or BK' = A'K', vu que dans le parallélogramme AB'A'B la ligne OD est parallèle à AB'. Donc deux hyperboles conjuguées ont même puissance.

Lorsqu'un parallélogramme est inscrit à une hyperbole, le diamètre qui joint les milieux des côtés non tangents à la courbe a ses extrémités situées sur l'hyperbole conjuguée.

En effet, soit *abcd* le parallélogramme inscrit à l'hyperbole (MAP, M'A'P'). Les côtés non tangents à la courbe sont *ad*, *bc*, joignons leurs milieux *p*, *q*, on va prouver que ces points appartiennent à l'hyperbole conjuguée (QBR, Q'B'R'). Tirons les lignes *mp*, *mq*, *np*, *nq*, on forme ainsi un parallélogramme *mnpq*, vu que les côtés de ce quadrilatère sont parallèles aux diagonales du parallélogramme *abcd*, les points *m*, *p*, *q*, *n* étant les milieux des côtés du quadrilatère *abcd*. De là il suit que les lignes *mn*, *pq* sont les dia-

Digitized by Google

Fig. 148. gonales du parallélogramme $mnpq$. L'asymptote OD coupe mq en son milieu I, car OD est parallèle au côté mp du parallélogramme $mnpq$ et passe par son centre. Donc $mI = qI$, de même $mS' = qS$. Mais le point m étant sur la première hyperbole,

$$mI \times mS' = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}{4}, \text{ donc } qI \times qS = \frac{\overline{AO}^2 + \overline{OB}^2}{4}; \text{ or } \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}{4}$$

est la puissance de la seconde hyperbole, donc le point q est sur cette courbe; il en est de même du point p. Donc les extrémités du diamètre pq sont sur l'hyperbole conjuguée.

Les points p, q étant les milieux des côtés bc, ad dont les extrémités sont sur les diagonales, il s'ensuit que les lignes bc, ad sont tangentes à l'hyperbole conjuguée.

Donc si un parallélogramme est inscrit à une hyperbole, il est inscrit à sa conjuguée.

Maintenant lorsque deux hyperboles conjuguées sont données, si on trace un diamètre ne coupant pas la première sa longueur est fixée par les points où il rencontre la seconde.

XIXe Théorème.

223.—Si d'un point pris hors d'une hyperbole on tire une tangente terminée à son point de contact et une sécante passant par le centre coupant l'hyperbole conjuguée en deux points, le carré de la tangente sera à la somme des carrés du demi-diamètre qui coïncide avec la sécante, et de la distance du point donné au centre, comme le carré du demi-diamètre conjugué de celui qui passe au point de contact est au carré de celui qui coïncide avec la sécante.

Fig. 140 *bis*. Soient (PC'P', QC'Q'), une hyperbole et (MDM', ND'N') sa conjuguée. Soit un point M et une tangente MC à la première hyperbole; du point M menons un diamètre MO coupant l'hyperbole conjuguée en deux points D, D', il faut prouver que

$$\frac{\overline{CM}^2}{\overline{OM}^2 + \overline{OD}^2} = \frac{\overline{OE}^2}{\overline{OD}^2},$$

EE' étant le diamètre conjugué du diamètre OC allant au point de contact C. Pour cela du point D, menons l'ordonnée DG au dia-

Digitized by Google

diamètre OC; puisque OC coupe la première hyperbole, il ne rencontre pas sa conjuguée. Des triangles semblables DOG, MOC on tire :

$$\frac{\overline{CM}^2}{\overline{DG}^2} = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OD}^2}, \quad \text{d'où} \quad \overline{DG}^2 = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OD}^2}\,\overline{DG}^2.$$

Considérons le diamètre OC comme appartenant à l'hyperbole conjuguée, on a, d'après un théorème démontré :

$$\frac{\overline{DG}^2}{\overline{OC}^2 + \overline{OG}^2} = \frac{\overline{OE}^2}{\overline{OC}^2},$$

d'où on tire :

$$\overline{DG}^2 = \frac{\overline{OE}^2}{\overline{OC}^2}\left(\overline{OC}^2 + \overline{OG}^2\right);$$

mais d'un autre côté on a :

$$\frac{OC}{OG} = \frac{OM}{OD}, \quad \text{donc} \quad \frac{\overline{OC}^2 + \overline{OG}^2}{\overline{OC}^2} = \frac{\overline{OD}^2 + \overline{OM}^2}{\overline{OM}^2};$$

alors $\overline{DG}^2$ devient $\dfrac{\overline{OE}^2}{\overline{OM}^2}\left(\overline{OD}^2 + \overline{OM}^2\right)$.

Substituant à $\overline{DG}^2$ sa valeur dans celle de $\overline{CM}^2$, il vient :

$$\overline{CM}^2 = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OD}^2} \times \frac{\overline{OE}^2}{\overline{OM}^2}\left(\overline{OD}^2 + \overline{OM}^2\right), \quad \text{d'où} \quad \frac{\overline{MC}^2}{\overline{OD}^2 + \overline{OM}^2} = \frac{\overline{OE}^2}{\overline{OD}^2};$$

c'est ce qu'il fallait prouver.

Donc, si d'un point hors d'une hyperbole, on mène une tangente terminée à son point de contact, et un diamètre ne coupant pas l'hyperbole donnée, et qui par conséquent coupe sa conjuguée, le carré de la tangente est à la somme des carrés du demi-diamètre qui coïncide avec la sécante, et de la distance du point donné au centre, comme le carré du diamètre conjugué de celui qui passe au point de contact est au carré du diamètre coïncidant avec la sécante.

Digitized by Google

Parabole.

Ier Théorème.

224.— Dans une parabole, lorsqu'une ligne droite oblique sur l'axe coupe la courbe en un point, elle la coupe en un second point.

Fig. 149. Soit Ax l'axe d'une parabole EAE', puis une ligne droite PQ, coupant la courbe en D, on va montrer qu'elle la coupe en un second point. En effet, tirons la tangente HH' parallèle à la sécante PQ, si on mène une seconde tangente au delà du point H, cette ligne rencontrera PQ puisqu'elle coupe la tangente HH'; mais cette tangente a tous ses points hors la courbe, donc pour que PQ coupe cette ligne entre la courbe et la tangente HH', il faut de toute nécessité qu'elle rencontre la courbe en un second point D'. Donc toute droite oblique à l'axe qui coupe la courbe en un point, la coupe toujours en un second point.

IIe Théorème.

225.— Dans une parabole, toutes les fois qu'une ligne droite coupe la courbe en deux points, l'aire du triangle formé par la sécante, l'axe et l'ordonnée d'un des points d'intersection est égal au rectangle compris sous l'ordonnée du point d'intersection considéré, et l'abscisse du point de contact de la tangente parallèle à la sécante.

Fig 149. Soit PD' une sécante dont D, D' sont les points d'intersection, et HH' la tangente parallèle, il faut prouver que le triangle PUD est équivalent au rectangle RAUI' compris sous l'abscisse du point D et l'ordonnée UI' = NH du point de contact, et que le triangle PMD' est équivalent au rectangle AMIR. Pour cela considérons les triangles PUD et TNH, ils sont semblables, en conséquence on en tire :

$$\frac{\text{tri. TNH}}{\text{tri. PUD}} = \frac{\overline{NH}^2}{\overline{UD}^2};$$

mais les carrés des ordonnées sont comme les abscisses correspondantes, donc

Digitized by Google

$$\frac{\text{tri.TNH}}{\text{tri. PUD}} = \frac{\overline{\text{NH}}^2}{\overline{\text{UD}}^2} = \frac{\text{AN}}{\text{AU}};$$

multipliant les deux termes de $\frac{\text{AN}}{\text{AU}}$ par NH, l'égalité devient :

$$\frac{\text{tri.TNH}}{\text{tri.PUD}} = \frac{\text{AN} \times \text{NH}}{\text{AU} \times \text{NH}};$$

on trouverait de même :

$$\frac{\text{tri. PMD}'}{\text{tri. TNH}} = \frac{\text{AM} \times \text{NH}}{\text{AN} \times \text{NH}};$$

mais le triangle TNH a pour expression $\frac{1}{2}\text{TN} \times \text{NH} = \text{AN} \times \text{NH}$; alors les deux égalités auxquelles on est parvenu donnent :

$$\text{tri. PMD}' = \text{AM} \times \text{NH}, \qquad \text{tri. PUD} = \text{AU} \times \text{NH}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

On va, comme exercice, démontrer ce théorème par le calcul.

L'équation de la parabole rapportée à son axe est $y^2 = 2px$, celle de la droite DD' est $y = \alpha x + \beta$; on va chercher les points d'intersection (x', y'), (x'', y'') de la droite avec la courbe. Pour cela il faut éliminer successivement x et y entre les équations

$$(1) \qquad y^2 = 2px, \qquad y = \alpha x + \beta. \qquad (2)$$

De l'élimination de y il résulte l'équation

$$x^2\alpha^2 + 2x(\alpha\beta - p) + \beta^2 = 0,$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{p - \alpha\beta \pm \sqrt{p^2 - 2p\alpha\beta}}{\alpha^2},$$

ainsi $x' = \frac{p - \alpha\beta + \sqrt{p^2 - 2p\alpha\beta}}{\alpha^2}$, $x'' = \frac{p - \alpha\beta - \sqrt{p^2 - 2p\alpha\beta}}{\alpha^2}$.

Pour avoir y mettons pour x sa valeur dans l'équation (2), il vient :

Digitized by Google

$$y = \alpha \frac{p - \alpha\beta \pm \sqrt{p^2 - 2p^2}}{\alpha^2} + \beta;$$

simplifiant, l'équation se change en

$$y = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2p\beta}}{\alpha},$$

ainsi $\quad y' = \frac{p + \sqrt{p^2 - 2p\beta}}{\alpha}, \quad y'' = \frac{p - \sqrt{p^2 - 2p\beta}}{\alpha}.$

Les coordonnées des points D, D′ sont donc trouvées ; cherchons l'ordonnée du point de contact de la tangente parallèle à la sécante DD′. L'équation d'une tangente en un point sur la courbe (x_1, y_1) est

$$yy_1 = p(x + x_1), \quad \text{ou} \quad y = \frac{p}{y_1}x + p\frac{x_1}{p_1},$$

pour qu'elle soit parallèle à DD′, il faut qu'on ait :

$$\alpha = \frac{p}{y_1}, \quad \text{d'où} \quad y_1 = \frac{p}{\alpha} = \text{NH}.$$

Maintenant posons pour abréger $k = \sqrt{p^2 - 2p\alpha\beta}$.

D'après ce qui vient d'être dit, on a :

$$\text{rect. IMAR} = \frac{p}{\alpha} \times \frac{p - \beta\alpha + k}{\alpha^2} = \frac{p^2 - p\alpha\beta + pk}{\alpha^3},$$

et

$$\text{rect. AUI'R} = \frac{p}{\alpha} \times \frac{p - \beta\alpha - k}{\alpha^2} = \frac{p^2 - p\beta\alpha - pk}{\alpha^3};$$

cherchons les aires des triangles PMD′, PUD.

On a :

$$\text{tri. PMD}' = (\text{AP} + \text{AM})\frac{\text{NH}}{2},$$

tout est connu excepté AP, mais cette quantité s'obtient en faisant dans l'équation (2), $y = 0$, et on a $x = -\frac{\beta}{\alpha}$, alors $\text{AP} = \frac{\beta}{\alpha}$. Par conséquent

Digitized by Google

$$\text{tri. PMD}' = \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{p - \alpha\beta + k}{\alpha^2}\right)\left(\frac{p+k}{2\alpha}\right);$$

effectuant les calculs indiqués, il vient :

$$\text{tri. PMD}' = \frac{\alpha\beta\,(p+k) + p\,(p+k) - \alpha\beta\,(p+k) + k\,(p+k)}{2\alpha^3} =$$

$$= \frac{(p+k)^2}{2\alpha^3} = \frac{p^2 + k^2 + 2pk}{2\alpha^3};$$

mettant à la place de k^2 sa valeur, l'expression $(p+k)^2$ devient :

$$p^2 + p^2 - 2p\alpha\beta + 2pk = 2p^2 - 2p\alpha\beta + 2pk.$$

Alors

$$\text{tri. PMD}' = \frac{2p^2 - 2p\alpha\beta + 2pk}{2\alpha^3} = \frac{p^2 - p\alpha\beta + pk}{\alpha^3};$$

on voit que c'est exactement la surface du rectangle MARI. Donc tri. PMD' = rect. MARI. Pour avoir l'expression de la surface du triangle PUD, il faudrait agir comme on vient de faire, mais en remarquant que x', y' ne diffèrent de x'', y'' que par le signe de k; alors il suffit dans le résultat obtenu de changer k en $-k$, il vient :

$$\text{tri. PUD} = \frac{p^2 - p\alpha\beta - pk}{\alpha^3};$$

on voit que c'est encore la surface du rectangle AUI'R. Ainsi le théorème se trouve démontré.

Donc si on mène une sécante coupant la parabole en deux points, les triangles formés par l'axe de la courbe, la sécante et les ordonnées des points d'intersection, sont équivalents aux rectangles compris sous les abscisses des points d'intersection et l'ordonnée du point de contact de la tangente parallèle à la sécante.

IIIe Théorème.

226.— Dans une parabole le paramètre relatif à l'axe est quadruple de la distance du sommet à la directrice et au foyer.

On appelle paramètre la double ordonnée au foyer. Soient Ax l'axe de la parabole, F son foyer et FM son demi-paramètre, puis DG Fig. 150.

Digitized by Google

la directrice. D'après la propriété de la parabole, MF est égale à la ligne MG qui est parallèle à Ax ; or $MG = 2AD = 2AF$, donc $2FM = 4AD = 4AF$, donc le paramètre est quadruple de la distance du sommet au foyer ou à la directrice ; l'équation de la courbe $y^2 = 2px$ donne $y = FM$ pour $x = \frac{1}{2}p$, donc $\overline{FM}^2 = 2p \times \frac{1}{2}p = p^2$, $FM = p$, ou $MM' = 2p = 4AF = 4AD$.

IVe Théorème.

227.— Dans une parabole l'ordonnée à l'axe est moyenne proportionnelle entre l'abscissé correspondante et le paramètre.

Fig. 150. Ce théorème se déduit de l'équation de la courbe $y^2 = 2px$, cependant démontrons-le géométriquement ; il faut prouver que $\overline{NR}^2 = AR \times MM'$. Tirons le rayon vecteur NF ; du triangle rectangle NFR on déduit $\overline{NR}^2 = \overline{NF}^2 - \overline{FR}^2$, mais DG étant la directrice, on a $NF = NP = AD + AR$, en outre $FR = AR - AF = AR - AD$. Alors substituant à $\overline{NF}^2$, $\overline{FR}^2$ leurs valeurs, l'égalité devient $\overline{NR}^2 = (AD + AR)^2 - (AD - AR)^2 = 4AR \times AD$, or $4AD = MM'$, donc $\overline{NR}^2 = AR \times MM'$.

Donc, dans une parabole, l'ordonnée à l'axe est moyenne proportionnelle entre le paramètre et l'abscisse correspondante.

Il suit du théorème précédent que les carrés des ordonnées sont proportionnels aux abscisses correspondantes, en outre qu'on a un procédé simple pour construire la parabole par points, procédé qu'on a déjà exposé au n° 13.

Ve Théorème.

228.—Dans une parabole si on mène une tangente et une sécante parallèles entre elles, puis le diamètre au point de contact et les ordonnées des points d'intersection de la sécante, le parallélogramme formé par la tangente, la sécante, le diamètre et l'axe, est équivalent à chaque triangle formé par la sécante, une ordonnée et le diamètre prolongés s'il le faut.

Fig. 149 *bis*. Soit VAV' une parabole dont Ax est l'axe, soient TH et MI la tangente et la sécante parallèles ; menons l'ordonnée HG du point de contact et les ordonnées IK, I'K' des points d'intersection de la

Digitized by Google

sécante ; cela fait, il faut démontrer que le parallélogramme TMOH est équivalent à chaque triangle IOE, I'OE'. En effet, on a, d'après un théorème démontré :

tri. HDT = rect. ADHS, tri. MKI = rect. AKES;

retranchant ces deux égalités membre à membre, il vient :

tri. HDT — tri. MKI = rect. ADHS — rect. AKES ;

retranchant des deux membres de cette dernière le trapèze ADHR, on a : tri. HDT—tri. MKI—trap. ADHR = rect. ADHS—rect. AKES — trap. ADHR. A l'inspection de la figure on voit que le premier se réduit à trap. TMLR, le second membre se réduit au tri. EHR, ainsi on a trap. TMIR = trap. EHR ; ajoutant maintenant aux deux membres de cette dernière égalité le trapèze RIOH, il vient trap. TMIR + trap. RIOH = trap. EHR + trap. RIOH. Le premier membre se réduit au parallélogramme TMOH, le second au triangle EIO, donc paral. TMOH = tri EIO.

Il ne reste plus qu'à démontrer que paral. TMOH = tri. IOE'.

Pour cela on remarque que tri. DHT = tri. MGO, car ces deux triangles ont même hauteur et même base et les côtés parallèles, alors tri. MGO = rect. ADHS ; on a aussi tri. MK'I = rect. AK'E'S; retranchant ces égalités membre à membre il vient — tri. MGO + tri. MK'I' = — rect. ADHS + rect. AK'E'S' ou trap. GK'I'O = rect. HDK'E'; retranchant des deux membres le rect. OGK'E', on a trap. GK'I'O — rect OGK'E' = rect. HDK'E' — rect. OGK'E', ce qui se réduit, d'après l'inspection de la figure à tri. IOE' = rect. HDGO. Or le rectangle HDGO est équivalent au parallélogramme TMOH, comme ayant même base OH et même hauteur DH.

Donc paral. TMOH = tri. IOE', ce qu'il fallait prouver.

229. — Donc si on mène dans une parabole, une tangente et une sécante parallèles, puis le diamètre au point de contact, le parallélogramme formé par la sécante, la tangente, le diamètre et l'axe est équivalent à chaque triangle formé par le diamètre, la sécante et une des ordonnées des deux points d'intersection de la sécante avec la parabole.

Du théorème qu'on vient de démontrer, il résulte que les triangles I'OE', EOI sont équivalents, donc

Digitized by Google

$$\frac{1}{2}\,OE \times IE = \frac{1}{2}\,OE' \times I'E',$$

mais ils sont semblables, donc

$$\frac{1}{2}\,OE \times IE : \frac{1}{2}\,OE' \times I'E' :: \overline{OE}^2 : \overline{OE'}^2,$$

et alors, en vertu de la première égalité, $OE = OE'$, $IO = OI'$ et $E'I' = EI$. Donc le diamètre à la parabole divise toutes les cordes parallèles à la tangente au point où il coupe la courbe en deux parties égales.

De là il suit que pour obtenir l'axe d'une parabole, on joint les milieux de deux cordes parallèles, on a ainsi la direction de l'axe, puis sur ce diamètre on mène une corde perpendiculaire, on détermine son milieu par lequel on tire une parallèle au diamètre, on a ainsi l'axe de la courbe, et son sommet est par là même déterminé.

VIe Théorème.

230.—Les ordonnées à un diamètre quelconque dans la parabole ont des carrés qui sont proportionnels aux abscisses correspondantes.

Fig. 151 Soit HX un diamètre quelconque, menons à ce diamètre les ordonnées IO, I'O', et tirons les ordonnées de ces mêmes points IK, I'K' relativement à l'axe; enfin au point H menons la tangente HT. Les triangles IOE, I'E'O' sont semblables, donc

$$\frac{\text{tri. } I'O'E'}{\text{tri. } IOE} = \frac{\overline{I'O'}^2}{\overline{IO}^2},$$

mais on a démontré que ces triangles sont équivalents aux parallélogrammes TM'O'H', TMOH; on a en conséquence :

$$\frac{\text{paral. } TM'O'H}{\text{paral. } TMOH} = \frac{\overline{I'O'}^2}{\overline{IO}^2};$$

mais paral. $TM'O'H = HO' \times KE$, paral. $TMOH = HO \times KE$, donc le rapport de ces deux surfaces se réduit à

Digitized by Google

$$\frac{HO'}{HO}, \text{ ainsi } \frac{\overline{I'O'}^2}{\overline{IO}^2} = \frac{HO'}{HO};$$

or HO′, HO sont les abscisses des points I′,I. Donc dans la parabole les ordonnées à un diamètre quelconque sont des carrés proportionnels aux abscisses correspondantes.

Le calcul donne la même conclusion, car on a vu qu'une parabole rapportée à une tangente et au diamètre passant au point de contact, a pour équation $y^2 = 2p'x$, donc

$$\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{x'}{x''}, \text{ c'est-à-dire que } \frac{\overline{I'O'}^2}{\overline{IO}^2} = \frac{H'O}{HO}.$$

VIIe Théorème.

231. — Dans une parabole, le paramètre relatif à un diamètre quelconque est égal à quatre fois le paramètre relatif à l'axe, plus quatre fois l'abscisse du point qui est l'origine du diamètre.

Soit Ax l'axe d'une parabole MAN, dont MR est un diamètre, on va montrer que le paramètre de la courbe relatif à MR, est égal au paramètre relatif à l'axe, plus quatre fois AD, l'abscisse de l'origine M du diamètre, ainsi que $P' = P + 4AD$. En effet, menons la tangente MT à la parabole, puis tirons AE parallèle à MT, on a $ME = AT = AD$, car l'abscisse du point de contact M est la moitié de la sous-tangente, en conséquence on a $\overline{AE}^2 = P' \times ME = P' \times AT$, P′ désignant le paramètre relatif au diamètre MR et P celui relatif à l'axe. On a encore $\overline{AP}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{TD}^2$, mettant pour $\overline{MD}^2$ sa valeur $P \times AD$, il vient $\overline{AE}^2 = \overline{TD}^2 + P \times AD$; mais $TD = 2AD$; alors $\overline{TD}^2 = 4\overline{AD}^2$, ce qui donne $\overline{AE}^2 = AD\,(P + 4AD)$. On a trouvé plus haut $P'AD = \overline{AE}^2$; donc $P' = P + 4AD$; c'est ce qu'il fallait prouver. Prolongeons la ligne MR jusqu'à la directrice en Q; prenons $MV = MQ$ sur la droite MR, et tirons l'ordonnée VH relative au diamètre MR, on a $\overline{VH}^2 = P' \times MV$; mais $P' = 4MV$, car, en vertu du théorème ci-dessus démontré, $P' = P + 4AD$, $P = 4AF$; donc Fig. 152.

$$P' = 4(AD + AF) = 4(AD + OA) = 4OD,$$

Digitized by Google

et comme, par hypothèse :

$$OD = MQ = MF = MV,$$

donc $$P' = 4MV = 4MF, \quad \text{d'où} \quad MV = \frac{P'}{4},$$

alors $$\overline{VH}^2 = \frac{P'^2}{4}, \quad \text{d'où} \quad VH = \frac{P'}{2}.$$

Maintenant de ce que $MQ = MV$, il s'ensuit que $MV = FT$, et alors on a $MV - ME = EV = AF = MQ - AT = MQ - AD = AO$, d'où il suit que $AO = AF$, et que par conséquent l'ordonnée VH passe au foyer de la parabole. Donc si sur un diamètre quelconque, à partir de son extrémité, on prend dans le sens de l'axe une longueur égale à la distance de cette extrémité à la directrice ou au foyer, et que par le point ainsi déterminé on mène une ordonnée au diamètre considéré, cette ordonnée passe au foyer et est égale à la moitié du paramètre relatif à ce diamètre.

232.—On va démontrer le même théorème par l'analyse.

L'équation de la parabole rapportée à son sommet est $y^2 = 2px$; désignons par a et b les coordonnées du point M, choisi pour nouvelle origine; les nouveaux axes seront la tangente MT et le diamètre MR. Les formules générales de transformation de coordonnées sont dans le cas qui nous occupe $x = a + x' \cos\alpha + y' \cos\alpha'$, $y = b + x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'$. Le diamètre MR pris pour nouvel axe des x étant parallèle à l'axe Ax, $\alpha = 0$, $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$. Le nouvel axe des y étant tangent au point (a, b), on a

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{p}{b}, \quad \sin\alpha' = \frac{\operatorname{tang}\alpha'}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha'}}, \quad \cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha'}};$$

remplaçant $\operatorname{tang}\alpha'$ par sa valeur $\frac{p}{b}$, $\sin\alpha'$, $\cos\alpha'$ deviennent :

$$\sin\alpha' = \frac{p}{\sqrt{p^2 + b^2}}, \quad \cos\alpha' = \frac{b}{\sqrt{p^2 + b^2}};$$

en conséquence les formules se changent en

Digitized by Google

$$x = a + x' + \frac{by'}{\sqrt{p^2+b^2}}, \quad y = b + \frac{py'}{\sqrt{p^2+b^2}};$$

substituant ces valeurs dans l'équation $y^2 = 2px$, on a :

$$b^2 + \frac{p^2y'^2}{p^2+b^2} + \frac{2pby'}{\sqrt{p^2+b^2}} = 2px' + 2pa + \frac{2pby'}{\sqrt{p^2+b^2}};$$

simplifiant et observant que le point M étant sur la parabole $b^2 = 2pa$, il vient $y'^2 = \frac{2(p^2+b^2)}{p} x'$; mettant pour b^2 sa valeur $2px$, l'équation se change en $y'^2 = 4(a + \frac{1}{2}p)\, x'$; ainsi l'équation de la parabole rapportée à une tangente et au diamètre aboutissant au point de contact est de la forme $y^2 = 2p'x$. On voit que le paramètre relatif à un diamètre quelconque est égal au paramètre relatif à l'axe plus quatre fois l'abscisse de l'origine de ce diamètre; en outre $a + \frac{1}{2}p = \text{OA} + \text{AD} = \text{MQ} = \text{MF}$. Donc dans une parabole le paramètre relatif à un diamètre quelconque est égal au paramètre relatif à l'axe plus quatre fois l'abscisse de l'origine de ce diamètre, ou bien encore ce paramètre est égal à quatre fois la distance de l'origine du diamètre au foyer de la courbe.

VIIIe Théorème.

233.—Une parabole peut être construite lorsqu'on donne une tangente, le diamètre passant par son point de contact, et le paramètre relatif à ce diamètre.

Soient MN, MP la tangente et le diamètre donnés. Désignons par $2p'$ le paramètre qui est donné. Il s'agit de construire la parabole avec ces seules quantités.

Au point M menons MN' perpendiculaire sur MP, et décrivons une parabole ayant $2p'$ pour paramètre, MP pour axe et M pour sommet. Cela fait, aux points α, β, γ, δ.... pris sur MP menons les ordonnées de la parabole décrite, soient αa, βb, γc, ... Maintenant par α, β, γ, δ... tirons des parallèles à MN, puis sur ces lignes rabattons les points a, b, c, d.... en a', b', c', d'.... Les points ainsi déterminés appartiennent à la parabole demandée, en Fig. 153.

Digitized by Google

sorte qu'en les joignant par un trait continu, la question est résolue. En effet, les points a, b, c, d.... appartenant à la première parabole dont $2p'$ est le paramètre relatif à l'axe, on a $y'^2 = 2p'x'$, $y''^2 = 2p'x''$, $y'''^2 = 2p'x'''$.... ; alors les points a', b', c', d'...., par rapport aux axes de coordonnées MP, MN, jouiront de la même relation, puisque les coordonnées du point a sont égales à celles du point a', et ainsi de suite. Donc a', b', c', d'.... sont sur une parabole dont MP est un diamètre, MN une tangente à l'extrémité, et $2p'$ le paramètre relatif au diamètre MP.

La courbe étant tracée par cette méthode, on détermine son axe et son sommet facilement, et alors tout dans cette courbe est fixé. Donc une parabole est déterminée et peut être construite, quand on donne une tangente, le diamètre au point de contact, et le paramètre qui y est relatif.

IXe Théorème.

234.—Si dans une parabole on mène une sécante coupant la courbe en deux points, et qu'on tire les ordonnées des points d'intersection relatives à un diamètre quelconque, la partie de ce diamètre comprise entre la courbe et la sécante est moyenne proportionnelle entre les abscisses des points d'intersection comptées sur le diamètre dont il s'agit.

Fig. 154. En effet, soient AMN une parabole, RN une sécante dont MP, NQ sont les ordonnées des points d'intersection relativement au diamètre RQ; il faut prouver que $\overline{AR}^2 = AP \times AQ$. Les carrés des ordonnées étant proportionnels aux abscisses correspondantes, on a :

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{NQ}^2} = \frac{AP}{AQ}.$$

A cause des triangles semblables RMP, RNQ, on a :

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{NQ}^2} = \frac{\overline{RP}^2}{\overline{RQ}^2};$$

or, $RP = AR + AP$, $RQ = AR + AQ$; en conséquence

Digitized by Google

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{NQ}^2} = \frac{(\overline{AR+AP})^2}{(\overline{AR+AQ})^2} = \frac{AP}{AQ}.$$

D'où on tire :

$$AQ(\overline{AR+AP})^2 = AP(\overline{AR+AQ})^2.$$

Simplifiant et divisant les deux membres de l'égalité par AQ—AP, on a en définitive :

$$\overline{AR}^2 = AP \times AQ.$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

Pour démontrer ce théorème par l'analyse, prenons pour axes de coordonnées le diamètre AP et la tangente à la courbe en A, alors l'équation de la parabole est

$$(1) \qquad y^2 = 2p'x, \qquad\qquad (2) \qquad y = \alpha x + \beta;$$

et celle de la sécante, $y = \alpha x + \beta$.

Pour obtenir les abscisses AP, AQ, éliminons y entre les équations (1), (2), il vient :

$$\alpha^2 x^2 + 2x(\beta\alpha - p) + \beta^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 2x\frac{\beta\alpha - p}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0.$$

Dans une équation du second degré, le terme indépendant de l'inconnue est le produit des racines prises en signe contraire. Donc $AP \times AQ = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$. Maintenant, pour obtenir AR, faisons dans l'équation (2) $y = 0$, il vient :

$$x = AR = -\frac{\beta}{\alpha}. \text{ Donc } \overline{AR}^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = AP \times AQ.$$

Donc si on mène une sécante dans la parabole, et les ordonnées des points d'intersection relatives à un diamètre quelconque, la partie de ce dernier comprise entre la courbe et la sécante est moyenne proportionnelle entre les abscisses des points d'intersection comptées sur le diamètre considéré.

Supposons que la sécante tourne autour d'un de ses points d'intersection jusqu'à venir tangente en M. Alors le théorème ci-des-

Digitized by Google

sus donne $\overline{AR'}^2 = \overline{AP}^2$ ou $AR' = AP$. Donc la tangente relative à un diamètre quelconque est double de l'abscisse du point de contact relative à ce diamètre.

Par le point N, menons les sécantes NR, ND, NB, et déterminons les abscisses des points d'intersection ; on aura :

$$\overline{AR}^2 = AP \times AQ, \quad \overline{AD}^2 = AK' \times AQ, \quad \overline{AB}^2 = AK \times AQ.$$

Donc

$$\overline{AR}^2 : \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 :: AP : AK' : AK.$$

Donc, si par un même point pris sur une parabole on tire plusieurs sécantes, les carrés des parties d'un diamètre pris pour axe des x, comprises entre ces sécantes et la courbe, sont proportionnels aux abscisses des seconds points d'intersection.

Xe Théorème.

235.—Les carrés de deux tangentes à une parabole, comprises entre leurs points de contact, et les diamètres prolongés passant par ces points, sont proportionnels aux paramètres relatifs à ces diamètres.

Fig 155. En effet, soient NT, MT′ deux tangentes en M et N à la parabole. Tirons les diamètres MR, NR′, et désignons par P, P′ les paramètres relatifs à MR et NR′, il s'agit de prouver que $\overline{MT'}^2 : \overline{NT}^2 :: P' : P$. Menons les ordonnées ME, NF relatives aux diamètres NR′ et MR. La figure MT′NF est un parallélogramme puisque ses côtés opposés sont parallèles, de même TT′NM est un parallélogramme comme ayant deux de ses côtés égaux et parallèles, car MT = NT′, et MT′, NT′ sont parallèles comme appartenant à deux diamètres. En conséquence

$$\overline{MT'}^2 = \overline{NF}^2 = P \times MF, \quad \overline{NT}^2 = \overline{ME}^2 = P' \times NE.$$

Donc

$$\frac{\overline{MT'}^2}{\overline{NT}^2} = \frac{P' \times MF}{P \times NE}.$$

Mais NE = MT = MF. Ainsi $\overline{MT'}^2 : \overline{NT}^2 :: P' : P$; c'est ce qu'il fallait prouver.

Digitized by Google

La figure MNEF est un parallélogramme puisque NE = MT = MF et que NE, MF sont parallèles. Donc si à une parabole on mène deux tangentes terminées à leurs points de contact et aux diamètres passant par ces points, les carrés des tangentes ainsi limitées sont proportionnels aux paramètres relatifs à ces diamètres.

XIe Théorème.

236.—Si d'un point pris sur un diamètre de la parabole on tire une sécante, le produit des distances du point donné aux points d'intersection de la sécante avec la courbe est égal au produit de la distance de ce point à l'origine du diamètre, et du paramètre relatif au diamètre qui divise la corde située sur la sécante en deux parties égales.

En effet, soit un diamètre AX, sur son prolongement prenons le point O par lequel on mène la sécante OMN, coupant la parabole en M et N. Soit CK le diamètre divisant la corde MN en deux parties égales, désignons par P le paramètre relatif à ce diamètre. Il faut prouver que $OM \times ON = OA \times P$. A cet effet tirons l'ordonnée AC relative à CK, il vient $\overline{AC}^2 = P \times BC$, puis $\overline{MI}^2 = P \times BI$. Donc Fig 156.

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{MI}^2} = \frac{BC}{BI}, \quad \text{d'où on tire} \quad \overline{AC}^2 - \overline{MI}^2 = \frac{BC - BI}{BI} \times \overline{MI}^2.$$

Mais

$$\frac{\overline{AC}^2 - \overline{MI}^2}{\overline{MI}^2} = \frac{\overline{OI}^2 - \overline{MI}^2}{\overline{MI}^2}, \quad \overline{OI}^2 - \overline{MI}^2 = (OI + MI)(OI - MI) = OM \times ON,$$

ensuite $BC - BI = IC = OA$. En conséquence, substituant à $\overline{AC}^2 - \overline{MI}^2$, et à $BC - BI$ leurs valeurs, on a :

$$\frac{\overline{AC}^2 - \overline{MI}^2}{MI^2} = \frac{BC - BI}{BI} = \frac{OM \times ON}{\overline{MI}^2} = \frac{OA}{OI}.$$

Enfin si à $\overline{MI}^2$ on substitue sa valeur $P \times BI$, il vient :

Digitized by Google

$$\frac{OM \times ON}{\overline{MI}^2} = \frac{OM \times ON}{P \times BI} = \frac{OA}{BI} \quad \text{ou} \quad OM \times ON = P \times OA;$$

c'est ce qu'il fallait prouver.

Si le point O était à l'intérieur de la parabole comme en O', on trouverait comme ci-desus $P \times O'A = aO' \times bO'$.

Admettons que la sécante se meuve parallèlement à elle-même jusqu'à devenir tangente en B. En appliquant le théorème qu'on vient de démontrer, on a $\overline{BT}^2 = P \times AT$. Ce résultat se déduit de la figure même car $BT = AC$, $AT = BC$, et comme on sait que $\overline{AC}^2 = P \times BC$, on en conclut $\overline{BT}^2 = P \times AT$: égalité qui donne matière à l'énoncé d'un théorème sur la parabole.

XIIe Théorème.

237.—Si d'un point quelconque on mène à la parabole deux sécantes la coupant en deux points, le produit des distances du point donné aux points d'intersection avec la parabole sur la première sécante est au produit des distances du même point aux points d'intersection sur la seconde, comme le paramètre du diamètre relatif à la corde située sur la première sécante est au paramètre relatif au diamètre divisant en deux parties égales la corde située sur la seconde sécante.

Fig. 156. Soit une parabole QPMN, et un point O pris hors cette courbe, d'où partent les deux sécantes OMN, OPQ. Il faut prouver que $\frac{OM \times ON}{OP \times OQ} = \frac{P}{P'}$, P étant le paramètre relatif au diamètre divisant MN en deux parties égales, et P' celui relatif au diamètre C'K divisant PQ en deux parties égales. Pour cela menons le diamètre OX, on a, d'après un théorème démontré, $OM \times ON = P \times OA$, et $OP \times OQ = P' \times OA$. Donc

$$\frac{OM \times ON}{OP \times OQ} = \frac{P \times OA}{P' \times OA} = \frac{P}{P'}.$$

Si $P = P'$, ce qui a lieu lorsque les diamètres CK, C'K' sont à égale distance de l'axe, on a $OM \times ON = OP \times OQ$.

Digitized by Google

238. — Supposons que l'une des sécantes, en se mouvant parallèlement à elle-même, devienne la tangente TB, on a :

$$\frac{\overline{TB}^2}{TP \times TQ} = \frac{P}{P'}.$$

Enfin, si la seconde sécante devient tangente en suivant le même mouvement que la première, on aura :

$$\frac{\overline{T'B}^2}{\overline{T'F}^2} = \frac{P}{P'} = \frac{OM \times ON}{OP \times OQ}.$$

Maintenant considérons le cas où le point de concours est à l'intérieur de la parabole. Soit O ce point, et désignons par aa', bb' les deux sécantes. Si on tire le diamètre OK, et qu'on désigne par P, P' les paramètres relatifs aux diamètres CD, C'D' divisant aa', bb' en deux parties égales, on a :

$$Oa \times Oa' = P \times OK, \quad Ob \times Ob' = P' \times OK.$$

Donc
$$\frac{Oa \times Oa'}{Ob \times Ob'} = \frac{P}{P'}.$$

Par les points O, O', O'' O''', ... pris sur OK, menons les parallèles Oa, $O'a_1$, $O''a_2$, $O'''a_3$,.. Ob, $O'b_1$, $O''b_2$, $O'''b_3$... On a, d'après ce qui vient d'être dit précédemment,

$$\frac{Oa \times Oa'}{Ob \times Ob'} = \frac{P}{P'}, \quad \frac{O'a_1 \times O'a'_1}{O'b_1 \times O'b'_1} = \frac{P}{P'}, \quad \frac{O''a_2 \times O''a'_2}{O''b_2 \times O''b'_2} = \frac{P}{P'}....$$

égalités qui donnent la suite de rapports égaux

$$Oa \times Oa' : Ob \times Ob' :: O'a_1 \times O'a'_1 : O'b_1 \times O'b'_1 :: O''a_2 \times O''a'_2 : O''b_2 \times O''b'_2 .....$$

239. — Cette propriété des sécantes dans la parabole permet de la construire, quand on connaît trois points et la direction de l'axe.

Digitized by Google

Fig. 158. En effet, soient A, B, C les trois points donnés, puis CR la direction de l'axe. Joignons les points A et C, et par le milieu de la corde AC tirons le diamètre OK. Enfin par le troisième point B menons une parallèle à l'axe, soit I le point où AC est coupé. Désignons par P le paramètre relatif au diamètre OK, alors on a $AI \times IC = P \times IB$, d'où $P = \frac{AI \times IC}{IB}$. Pour construire la valeur de P, faisons passer une circonférence par les trois points A, B, C et prolongeons IB jusqu'à ce qu'elle la rencontre en E. Cette construction donne $IE = \frac{AI \times IC}{BI} = P$. Alors si on tire ME parallèle à AC, la ligne OM qu'on obtient représente le paramètre P.

Pour ramener la question à un cas déjà examiné, il faut déterminer le point où le diamètre OK coupe la parabole. Désignons par D ce point, on a $OA \times OC = P \times OD$, d'où $OD = \frac{OA \times OC}{P}$, mais $OA = OC$, alors $OD = \frac{\overline{OC}^2}{P}$. D'après cela, si sur OK on élève une perpendiculaire en O et qu'on prenne $OH = OC$, et puis ensuite sur OK la ligne $OM = P$, il n'y a plus qu'à faire passer une circonférence par les points H, M, dont le centre soit sur OK, et le point D où ce diamètre est coupé est le point cherché. Car on a pour l'ordonnée OH, $\overline{OH}^2 = OM \times OD = P \times OD$, d'où $OD = \frac{\overline{OC}^2}{P}$.

Maintenant si au point D on mène une parallèle à AC, on connaît dans la parabole un diamètre, le paramètre qui y est relatif, et la tangente à son extrémité. Donc on est ramené à construire cette courbe dans un des cas déjà examinés.

On doit remarquer que si on ne donne pas la direction du diamètre, il y a une infinité de paraboles passant par les trois points; cela tient à ce qu'il faut quatre conditions pour fixer une parabole; pour déterminer l'ellipse et l'hyperbole, il en faut cinq.

Paraboles semblables.

240. — Deux paraboles ayant même axe, leur sommet au même point, ont toutes les sécantes homologues dans le rapport des distances du sommet à leur foyer.

Digitized by Google

En effet, soient Ax l'axe commun, A le sommet commun et F, F′ leurs foyers, tirons les ordonnées passant par ces derniers points. On sait que

$$NF = 2AF,\ F'M' = 2AF',\ \text{donc}\ \frac{FN}{F'M'} = \frac{AF}{AF'};$$

il suit de là que les points M, N sont sur la même droite passant par le sommet A.

Tous les points ainsi situés dans les paraboles sont dits homologues.

Si par le sommet on tire une sécante quelconque, les parties de ces lignes comprises dans chaque courbe, ainsi que les coordonnées des points d'intersection sont entre elles comme AF est à AF′, ou comme les paramètres relatifs à l'axe. Fig. 159.

En effet, soit une sécante AB′, tirons les ordonnées des points d'intersection et désignons par P, P′ les paramètres relatifs à l'axe. On a :

$$\overline{BC}^2 = P \times AC,\ \overline{B'C'}^2 = P' \times AC',\ \text{d'où}\ \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2} = \frac{P \times AC}{P' \times AC'}.$$

Les triangles BAC, B′AC′ étant semblables, $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, en conséquence l'égalité obtenue se réduit à $\frac{BC}{B'C'} = \frac{P}{P'}$.

Donc

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{P}{P'}.$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

Prenons deux sécantes quelconques homologues ne passant pas au sommet, soient NB, M′B′. Les points N,M′ et B,B′ étant homologues, donnent en les joignant au point A les triangles NAB, M′AB′. D'après ce qu'on vient de prouver

$$\frac{AN}{AM'} = \frac{AB}{AB'} = \frac{P}{P'}.$$

Digitized by Google

Donc les lignes NB, M'B' sont parallèles et les triangles NAB, M'AB' semblables; conséquemment

$$\frac{NB}{M'B'} = \frac{AN}{AM'} = \frac{P'}{P}.$$

Donc deux paraboles ayant même sommet et même axe, ont leurs sécantes homologues dans le rapport des paramètres relatifs à leur axe, et en outre ces sécantes sont parallèles.

Problème.

241. — Il arrive souvent qu'on ait à raccorder deux lignes driotes par un arc de parabole, dont les extrémités sont fixées sur les droites. On va exposer la méthode à suivre pour construire la courbe par points.

Soient AB, CD les deux lignes droites à raccorder par un arc de parabole tangent en B et C à ces lignes. Pour construire la courbe prolongeons AB, CD jusqu'à leur rencontre en H, joignons B à C et le milieu de cette ligne au point H. Soit K le milieu de HI, ce point est sur la parabole. Pour le prouver il suffit de montrer que HI est un diamètre; or on sait que si on joint dans une courbe du second degré le point d'intersection de deux tangentes au centre, ou, en un mot, qu'on mène par ce point un diamètre, cette ligne divise la corde passant aux points de contact en deux parties égales. Donc HI est un diamètre, et comme dans toute parabole la sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact, il s'ensuit que le milieu K de HI est sur la courbe. Cela prouvé, menons la ligne MKL parallèle à BC, c'est une tangente à la parabole. Ainsi, on connaît deux tangentes MB, MK et leur point de contact; on détermine comme précédemment un second point de la courbe. En agissant ainsi, on trouve les points q, m, l, k, n.

Fig. 160.

Les lignes de construction QZ, MY, HI, LU, NT sont parallèles comme diamètres d'une même parabole. En outre, $Mm' = \frac{1}{2}MY$ puisque le point K est le milieu de HI, alors $Mm = \frac{1}{2}Mm' = \frac{1}{4}MY = \frac{1}{4}KI$. La ligne KI est la flèche de la

Digitized by Google

parabole. De même on prouverait que $Qq = \frac{1}{4} Mm = \frac{1}{16} KI$, etc.

Si on veut un point intermédiaire entre m et K, prenons le milieu de MH et tirons par ce point un diamètre, c'est-à-dire une parallèle à HI. Joignons m à K, la ligne mK est divisée au point p' en deux parties égales, puisque dans le trapèze MmKH le point R est le milieu de MH. En conséquence, si du point B on mène Ba parallèle à mK, la ligne Ba sera l'ordonnée du point de contact B relativement au diamètre RK. Donc si on prend le milieu p de Ra, on aura le point de la courbe situé sur le diamètre RX. D'après la construction qu'on vient de faire, $Pp' = \frac{1}{2} Mm$, donc $Pp = \frac{1}{2} Pp' = \frac{1}{4} Mm = \frac{1}{16} KI$; on voit en outre que $RH = \frac{1}{4} BH$.

Donc étant donnés deux tangentes à la parabole et leur point de contact, on peut facilement la construire par points.

242. — Pour construire une parabole quand on donne sa flèche et son ouverture, la flèche étant perpendiculaire à la corde qui joint les extrémités de l'arc, il faut suivre la marche exposée ci-après.

Prenons pour axe des y l'axe de la parabole, et pour axe des x la tangente au sommet.

L'équation de la parabole est alors $x^2 = 2qy$. Soient B, B' les extrémités de l'arc parabolique qu'il faut construire, posons $BB' = 2h$, $OA = BM = f$. La courbe devant passer aux points B, B', son équation doit être satisfaite par $x = h$, $y = f$, ainsi on a : Fig. 160 *bis*.

$$h^2 = 2qf, \quad \text{d'où } 2q = \frac{h^2}{f},$$

en sorte que l'équation de la parabole est

$$x^2 = \frac{h^2}{f} y.$$

Posons la quantité constante $\frac{f}{h^2}$ égale à A, et donnons à x successivement tous les nombres entiers depuis 0 jusqu'à h, les ordonnées correspondantes ont pour valeurs les expressions ci-dessous indiquées :

Digitized by Google

$x =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7.
$y =$	0,	A,	4A,	9A,	16A,	25A,	36A,	49A.

Ainsi, en résumé, divisons AM $= h$ en h parties égales, soient a, a', a', a''..... les points de division, puis en ces points élevons des perpendiculaires à AM. Pour avoir l'ordonnée de la courbe à la $n^{\text{ième}}$ division, il faut prendre sur la perpendiculaire une longueur égale à n^2A.

Cette méthode fort simple est applicable par tout le monde, puisqu'il n'y a point d'extraction de racine à effectuer. Si, à l'échelle à laquelle on opère, les ordonnées sont trop distantes pour tracer la courbe sans jarrets, on prend deux ou trois fois plus d'ordonnées, ou plus généralement m fois plus. Alors AM sera divisé en mh parties égales. Pour trouver les ordonnées aux points de division, il faut suivre la même méthode que précédemment, mais en prenant

$$A = \frac{f}{m^2h^2}.$$

Ici se termine l'exposé des propriétés des courbes du second ordre, il ne nous reste plus qu'à exposer les méthodes pour calculer les arcs et les aires de ces courbes.

Digitized by Google

TROISIÈME PARTIE.

RECTIFICATION ET QUADRATURE DES COURBES DU SECOND DEGRÉ.

CIRCONFÉRENCE.

Rectification des arcs circulaires.

243.—Mesurer une ligne, c'est la comparer à une autre ligne prise pour unité; le rapport résultant de cette opération est l'expression de la longueur de la ligne.

Pour trouver la longueur d'une circonférence ou d'un arc circulaire, étant obligé de considérer cette courbe comme la limite des périmètres des polygones réguliers qui y sont inscrits ou circonscrits, on va démontrer d'abord le théorème suivant sur les limites.

Si deux quantités variables sont toujours égales, et qu'elles convergent vers deux autres quantités fixes, dont elles peuvent approcher autant qu'on le veut, ces deux dernières quantités, qui sont les limites des premières, sont aussi égales.

Soient A', B' les deux quantités variables, convergeant vers les quantités A et B de manière que $A-A'$ peut être plus petit que toute quantité donnée, ainsi que $B-B'$; on va montrer que si $A'=B'$ quelles que soient les valeurs qu'on donne à A' et B', les limites A et B sont égales. Car supposons que A ne soit point égal à B, désignons alors leur différence par α, on aura $A-B=\alpha$ ou $A=B+\alpha$; de cette égalité retranchons la première, il vient $A-A'=B-B'+\alpha$. Mais quelque petit que soit α, on peut toujours donner à A' une valeur telle que $A-A'$ soit moindre que α et à fortiori que $B-B'+\alpha$, car on suppose A' et B' plus petits que A et B. Donc l'hypothèse admise qu'il y ait une différence entre A et B, mène à cette conclusion que la partie est égale au tout, ce qui ne

Digitized by Google

peut être, par conséquent les deux quantités A et B ne peuvent être inégales, donc elles sont égales.

Théorème.

244.—Le rapport de la circonférence au diamètre est constant.

En effet, soient R, R′ les rayons de deux circonférences, inscrivons dans chacune d'elles un polygone régulier du même nombre de côtés n; désignons le périmètre de ces polygones par P et P′. On sait que les périmètres de deux polygones réguliers du même nombre de côtés sont entre eux comme les rayons des cercles circonscrits, en conséquence on a périm. (P) : périm. (P′) :: R : R′, d'où périm. (P) $\times$ R′ = périm. (P′) $\times$ R ; cette égalité existera toujours quel que soit le nombre n; plus ce nombre croît, plus périm. (P), périm. (P′) s'approchent de circ. (R) et circ. (R′), donc périm. (P) $\times$ R′, périm. (P′) $\times$ R ont pour limites circ. (R) $\times$ R′, circ. (R′) $\times$ R ; donc, en vertu du théorème démontré sur les limites, circ. (R) $\times$ R′ = circ. (R′) $\times$ R ; de là on tire $\frac{\text{circ.(R)}}{2\text{R}} = \frac{\text{circ.(R')}}{2\text{R}'}$, donc le rapport de la circonférence au diamètre est constant ; ce rapport est désigné généralement par π.

Rectification de la circonférence.

De l'égalité $\frac{\text{circ.(R)}}{2\text{R}} = \pi$ on déduit circ. (R) $= 2\pi\text{R}$; ainsi ayant déterminé une fois pour toutes le nombre π, en le multipliant par 2R, on a la longueur de la circonférence rectifiée. Supposons R $= 1$, alors circ. $= 2\pi$, ainsi on peut dire que le nombre π est la longueur de la demi-circonférence développée dont le rayon est l'unité.

Rectification de l'arc circulaire.

245.—On démontre que les angles au centre dans une même circonférence sont entre eux comme les arcs qu'ils interceptent, en conséquence soit une circonférence dont AO est le rayon et AOC un angle au centre, on aura $\frac{\text{arc (AC)}}{\text{circ.(OA)}} = \frac{\text{AOC}}{4 \text{ droits}}$. Or circ. (OA) =

Fig. 161.

Digitized by Google

$2\pi \times OA$; donc arc $(AC) = 2\pi \times OA \times \frac{AOC}{4 \text{ droits}}$; dans cette égalité il y a d'inconnu arc (AC) et le rapport $\frac{AOC}{4 \text{ droits}}$; mais, en vertu du théorème énoncé, on peut remplacer le rapport

$$\frac{AOC}{4 \text{ droits}} \quad \text{par} \quad \frac{\text{arc}\,(AC)}{\text{circ.}(OA)}.$$

C'est dans le but d'obtenir ce dernier rapport qu'on a divisé la circonférence de la manière suivante : la circonférence entière a été mise en quatre parties égales auxquelles on a donné le nom de quadrant, le quadrant en 90 parties qu'on nomme degrés, le degré en 60 minutes, la minute en 60 secondes et enfin la seconde en 60 tierces. Cette division qui porte le nom de sexagésimale n'étant pas conforme à notre système de numération, on a mis le quadrant en 100 minutes, la minute en 100 secondes et la seconde en 100 tierces : ce mode de division se nomme division centésimale.

Bien que le système métrique soit mis en vigueur depuis quelques années, la division sexagésimale est encore fort suivie à cause de l'avantage de donner un grand nombre de parties aliquotes de la circonférence, c'est-à-dire d'arcs qui y soient contenus un nombre exact de fois, pouvant se représenter exactement en degrés, minutes et secondes; du reste elle présente dans le calcul toute la difficulté des anciennes mesures.

La division centésimale est plus conforme au système adopté pour les nouvelles mesures, puis ensuite la réduction d'un arc en une des divisions adoptées quelconques de la circonférence est extrêmement facile; ainsi soit l'angle 54° 5′ 25″, en secondes cet arc a pour expression 540525″, en minutes 5405′,25 et enfin en quadrant $0^q,540525$. Le rapport d'un degré nouveau au degré ancien est

$$\frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{60}} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}.$$

Ainsi le degré centésimal est les $\frac{3}{5}$ du degré ancien.

Revenons maintenant à l'égalité

Digitized by Google

$$\text{arc}(AC) = 2\pi \times OA \frac{\text{arc}(AC)}{4^q} = 2\pi \times OA \frac{2^\circ\, 25'}{4^q} = \pi \times OA \times \frac{2^\circ\, 25'}{2^q}.$$

Pour diviser deux quantités l'une par l'autre il faut qu'elles soient rapportées à la même unité ; prenons ici la minute, alors en réduisant $2^\circ\, 25'$ et 180° en minutes, on a $\text{arc}(AC) = \pi \times OA \times \frac{145}{10800}$. Ainsi on voit qu'au rapport inconnu des angles AOC et quatre droits, on a substitué le rapport de deux arcs, qui est connu à l'aide de la division en parties égales de la circonférence.

L'expression $\text{arc}(AC) = \pi \times OA \frac{AOC}{2 \text{ droits}}$ montre que tous les arcs qui correspondent, ont même angle au centre sur des circonférences de rayons différents et sont entre eux comme leurs rayons. Ces arcs sont dits semblables. Donc les arcs semblables sont entre eux comme les rayons des circonférences dont ils font partie.

Aire du cercle.

246.—Pour évaluer une surface limitée de tous côtés, il faut la comparer à une autre surface prise pour unité, et le résultat de cette comparaison est l'expression de l'étendue contenue entre les limites de la surface.

On ne doit pas confondre comme on le fait souvent les mots surface et aire ; le mot surface s'emploie plus généralement pour indiquer la forme, abstraction faite de ses limites, tandis que le mot aire ne s'applique à l'étendue que lorsqu'on l'envisage par rapport à la surface prise pour terme de comparaison. Du reste on confond souvent le cercle et la circonférence ; la circonférence est une ligne plane dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur qu'on nomme centre, tandis que le cercle est l'étendue comprise dans la circonférence.

L'opération qu'il faut faire pour trouver l'expression de l'aire d'une surface se nomme quadrature.

Théorème.

247.—L'aire d'un cercle est égale à sa circonférence multipliée par la moitié de son rayon. En effet, l'aire d'un polygone régulier

Digitized by Google

est égale à son périmètre multiplié par la moitié de son apothème; d'après cela circonscrivons à la circonférence donnée, dont R est le rayon, un polygone régulier P d'un nombre de côtés n, son apothème est le rayon R, alors on a polyg. (P) = périm. (P) $\times \frac{1}{2}$R. Supposons que le nombre n croisse, polyg. (P) et périm. (P) vont s'approcher de cerc. (R) et circ. (R); et comme on sait que la limite du polygone est le cercle, et celle du périmètre (P) la circonférence, et qu'en outre, quel que soit le nombre des côté n du polygone, on a toujours polyg. (P) = périm. (P) $\times \frac{1}{2}$ R, donc cerc. (R) = circ. (R) $\times \frac{1}{2}$ R : c'est ce qu'il fallait prouver. Dans l'égalité cerc. (R) = circ. (R) $\times \frac{1}{2}$ R, à la place de circ. (R), mettons sa valeur 2πR, il vient cerc. (R) $= \frac{1}{2}$ R $\times 2\pi$R $= \pi\overline{R}^2$. Donc l'aire d'un cercle a pour expression π multiplié par le carré du rayon.

De l'égalité cer. (R) $= \pi\overline{R}^2$ on conclut que les aires des cercles sont entre elles cemme les carrés des rayons.

248. — Supposons que sur les trois côtés d'un triangle rectangle comme diamètres on décrive des circonférences, l'aire de celle décrite sur l'hypoténuse sera la somme des aires des deux autres décrites sur les côtés de l'angle droit; car on sait que Fig. 162.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2, \quad \text{alors} \quad \pi\frac{\overline{AB}^2}{4} = \pi\frac{\overline{AC}^2}{4} + \pi\frac{\overline{BC}^2}{4},$$

or $\pi\frac{\overline{AB}^2}{4}$, $\pi\frac{\overline{AC}^2}{4}$, $\pi\frac{\overline{BC}^2}{4}$ sont les aires dont il s'agit, ainsi le théorème est démontré; de l'égalité qu'on vient d'obtenir en dernier lieu on tire :

$$\pi\frac{\overline{AC}^2}{4} = \pi\frac{\overline{AB}^2}{4} - \pi\frac{\overline{BC}^2}{4},$$

ce qui prouve que l'aire du cercle dont le diamètre est l'un des

Digitized by Google

côtés de l'angle droit est la différence entre celles des cercles décrits sur les deux autres côtés.

Abaissons du sommet de l'angle droit C une perpendiculaire sur la base, on sait que

$$\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: AD : AB, \quad \text{donc} \quad \pi\frac{\overline{AC}^2}{4} : \pi\frac{\overline{AB}^2}{4} :: AD : AB.$$

Ainsi donc l'aire du cercle décrit sur un des côtés de l'angle droit, comme diamètre, est à l'aire de celui décrit sur l'hypoténuse comme la projection de ce côté sur l'hypoténuse est à cette hypoténuse.

Le triangle rectangle ABC donne encore :

$$\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 :: AD : DB, \quad \text{d'où} \quad \pi\frac{\overline{AC}^2}{4} : \pi\frac{\overline{BC}^2}{4} :: AD : DB.$$

Donc, si sur les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle comme diamètres ou comme rayons, on décrit des circonférences, les aires de ces courbes sont entre elles comme les projections des côtés correspondants de l'angle droit sur l'hypoténuse.

Des Lunules.

249. — Sur les trois côtés d'un triangle quelconque ABC décrivons des circonférences, ces lignes en se coupant donnent les surfaces curvilignes BPMN, M'P'CN' auxquelles on donne le nom de lunules; posons les égalités $ABC = T$, $BAMN = X$, $BNMP = Y$, $MAM' = Z$, $CN'M'P' = Y$, $AM'N'C = X'$; cela fait, du triangle ABC on tire $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta$, θ désignant l'angle BAC. D'où

Fig. 163.

$$\pi\frac{a^2}{4} = \pi\frac{b^2}{4} + \pi\frac{c^2}{4} + \frac{1}{2}\pi ab\cos\theta.$$

Or, d'après la figure, on voit que

$$\frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{4} = X + X' + Z + T, \quad \frac{1}{2}\pi\frac{b^2}{4} = Y' + X', \quad \frac{1}{2}\pi\frac{c^2}{4} = X + Y,$$

Digitized by Google

donc, si on remplace les aires circulaires par leurs valeurs, il vient :

$$X'+X+Z+T = X'+Y'+X+Y+\frac{1}{3}\pi ab\cos\theta\ ;$$

simplifiant, on a :

$$Z+T=Y+Y'+\frac{1}{4}\pi ab\cos\theta,\quad \text{d'où}\quad Y+Y'=Z+T-\frac{1}{4}\pi ab\cos\theta.$$

Telle est la relation qui existe entre les lunules et l'aire du triangle. Supposons $\theta = 90°$, la circonférence décrite sur le côté a comme diamètre, qui est maintenant l'hypoténuse, passe au point C, donc $Z = 0$. Alors l'égalité devient $Y + Y' = T$; ainsi la somme des aires des lunules est équivalente à l'aire du triangle. On voit que cette propriété des lunules n'a lieu que lorsque le triangle est rectangle. Dans ce cas, les lunules AMCD, CNBE sont dites lunules d'Hypocrate de Chio, parce que c'est lui qui, le premier, donna cette démonstration; elles présentent dans l'histoire de la Géométrie le premier exemple de la quadrature d'une courbe. Fig. 162.

Aires des secteurs circulaires.

250. — On appelle secteur la partie du cercle comprise entre un arc et les rayons aboutissant à ses extrémités.

L'aire d'un secteur est égale à l'arc correspondant multiplié par la moitié du rayon du cercle dont il fait partie.

En effet, on a, d'après un théorème démontré en géométrie,

$$\frac{\text{sect.(AOC)}}{\text{cer.(OA)}}=\frac{\text{arc (AC)}}{\text{circ.(AC)}}=\frac{\text{arc (AC)}\ \frac{1}{2}\ \text{OA}}{\text{circ.(AC)}\times\frac{1}{2}\ \text{OA}},$$

Mais

$$\text{circ. (OA)}\times\frac{1}{2}\text{OA}=\text{cer.(OA)},\ \text{donc sect.(AOC)}=\text{arc (AC)}\times\frac{1}{2}\text{OA},$$

égalité qui démontre le théorème.

De l'égalité sect. (AOC) = arc (AC) $\times \frac{1}{2}$OA, on déduit, en remplaçant l'arc AC par sa valeur,

Digitized by Google

$$\text{sect.}(AOC) = \pi \frac{AOC}{2^d} \times \frac{1}{2} \overline{OA}^2.$$

Donc, pour tous les secteurs de rayons différents, dont les angles au centre sont égaux, les aires sont entre elles comme les carrés des rayons ; de tels secteurs sont dits semblables.

Donc les aires des secteurs semblables sont entre elles comme les carrés des rayons des cercles dont ils font partie.

Aire du Segment circulaire.

251. — On appelle segment la portion du cercle comprise entre une corde et l'arc qu'elle sous-tend.

Fig. 161. A l'inspection de la figure, on voit que, quel que soit le segment donné, il est la différence entre le secteur qui a même arc que lui, et le triangle ayant pour base sa corde, et son sommet au centre; en conséquence on a seg. (AMC) = sect. (AOC) — triang. (AOC). Désignons l'angle AOC par 2α et le rayon OA par R, on a :

$$\text{seg. (AMC)} = \pi \frac{2\alpha}{4^d} R^2 - R^2 \cos\alpha = R^2 \left(\frac{2\alpha\pi}{4^d} - \cos\alpha\right).$$

Ainsi, on voit que tous les segments pour lesquels les angles au centre correspondants sont égaux, ont des aires qui sont entre elles comme les carrés des rayons des cercles dont ils font partie, ces segments sont dits semblables; donc les aires des segments semblables sont entre elles comme les carrés des rayons des cercles auxquels ils appartiennent.

Aire d'une couronne circulaire.

252. — On appelle couronne circulaire, la portion de plan comprise entre deux circonférences concentriques.

L'aire d'une couronne est égale à la circonférence équidistante de celles qui la limitent multipliée par sa largeur, c'est-à-dire la différence des rayons des circonférences concentriques. En effet, soient deux circonférences ACB, *acb* concentriques en O, on a :

$$\text{Cour. (ACB, } acb) = \text{cer.(OA)} - \text{cer.(O}a) = \pi OA^2 - \pi \overline{Oa}^2$$

$$= \pi (OA + Oa)(OA - Oa) = \frac{2\pi OA + 2\pi Oa}{2} (OA - aO);$$

Digitized by Google

or $2\pi OA$, $2\pi Oa$ sont les longueurs des cir ACB et acb, $OA - aO = Aa$, c'est-à-dire la largeur de la couronne. Ainsi on voit déjà que l'aire d'une couronne est égale à la moitié de la somme des circonférences qui la limitent multipliée par sa largeur ; mais

$$\frac{2\pi OA + 2\pi Oa}{2} = \frac{2\pi(OA + Oa)}{2}$$

soit α le milieu de Aa ; avec $O\alpha$ pour rayon décrivons une circonférence. On a :

$$\text{cir. } (O\alpha) = 2\pi \frac{OA + Oa}{2}, \quad \text{car} \quad A\alpha = Oa + \frac{OA - Oa}{2},$$

donc $A\alpha = \dfrac{OA + Oa}{2}$ et par suite $\text{cir.}(A\alpha) = 2\pi \dfrac{OA + Oa}{2}$.

Donc l'aire d'une couronne est égale à sa largeur multipliée par la circonférence équidistante de celles qui la limitent.

253. — L'aire d'une partie de couronne comprise entre deux rayons est égale à l'arc de la circonférence équidistante de celles qui la limitent compris entre les deux rayons multiplié par la largeur de la couronne.

En effet, l'aire $(ACca) = \text{sect.}(AOC) - \text{sect.}(a'OC) =$

$$= \pi \overline{OA}^2 \frac{AOC}{4^d} - \pi \times \overline{Oa}^2 \frac{AOC}{4^d} = \pi \frac{AOC}{4^d} (\overline{OA}^2 - \overline{Oa}^2), \qquad \text{Fig. 161.}$$

or $\overline{OA}^2 - \overline{Oa}^2 = (OA + Oa)(OA - Oa)$, $OA - Oa = Aa$;

en conséquence l'égalité devient

$$2\pi \frac{AOC}{4^d} \left(\frac{OA + Oa}{2}\right) \times Aa = \text{aire } (ACca) ;$$

remarquons que

$$\frac{OA + Oa}{2} = O\alpha, \quad \text{donc} \quad \text{aire } (ACca) = Aa \times 2\pi \frac{AOC}{4^d} \alpha O ;$$

or l'arc $\alpha\alpha'$ de la circonférence $A\alpha$ compris entre les rayons OA, OC a pour expression $2\pi \dfrac{AOC}{4^a} O\alpha$. Donc la portion d'une couronne

Digitized by Google

comprise entre deux rayons est égale à sa largeur multipliée par l'arc équidistant de ceux qui la limitent, compris entre les deux rayons.

De l'expression aire $(ACca) = 2\pi \frac{AOC}{4^d} O\alpha \times Aa$,

on en conclut, que les aires des portions de couronnes correspondant à des angles au centre égaux et ayant même largeur, sont entre elles comme les rayons des circonférences équidistantes de celles qui les limitent.

D'après les théorèmes qu'on vient de démontrer, on voit que toutes les questions sur les aires des cercles, des secteurs semblables et des segments semblables se ramènent à des questions sur des carrés construits sur des lignes données.

Les formules pour la rectification de la circonférence, et la quadrature du cercle ne permettent d'obtenir ces deux quantités, qu'autant que le nombre π est déterminé, aussi maintenant va-t-on exposer les diverses théories qui servent à l'obtenir,

Détermination du nombre π.

254.—La détermination du nombre π exige que l'on cherche les valeurs successives de deux quantités A et B entre lesquelles se trouve le nombre demandé, et ayant ce dernier pour limite; le rapport cherché étant compris entre A et B il s'ensuit que l'une des deux quantités représente le nombre π avec une approximation moindre que A — B, qui sera en plus ou en moins, selon que A est plus grand ou plus petit que le nombre π, il suit de là que plus les valeurs de A et B seront rapprochées l'une de l'autre, plus l'approximation qu'on obtiendra en prenant l'une d'elles pour π sera grande.

En suivant la méthode qu'on vient d'exposer il y a deux procédés à suivre pour résoudre la question : le premier consiste à déterminer les périmètres d'une série de polygones réguliers inscrits à la circonférence et ceux des polygones réguliers correspondants circonscrits à la même circonférence : de cette manière, on pourra déterminer la longueur de la circonférence développée avec toute l'approximation désirable, et si on prend celle dont le rayon est l'unité, il suffira de diviser sa longueur par deux, pour obtenir le rapport cherché.*

Digitized by Google

Nous allons exposer cette première méthode, ensuite nous exposerons la seconde.

Pour trouver les périmètres d'une série de polygones réguliers inscrits et circonférence à la circonférence, il faut déterminer comment, connaissant les périmètres de deux polygones réguliers l'un inscrit et l'autre circonscrit, on peut obtenir les périmètres des polygones réguliers d'un nombre double de côtés.

Considérons d'abord les polygones inscrits. Soit AB le côté d'un polygone régulier donné inscrit dans la circonférence OA, pour avoir celui d'un polygone inscrit d'un nombre de côtés double, abaissons du centre la perpendiculaire OD sur AB, joignons son extrémité D à A et B ; DA, DB sont les côtés correspondants à AB dans le second polygone, il s'agit d'obtenir AD en fonction de OA et AB. Pour cela posons $AB = c$, $AD = x$, $AO = R$. Du triangle rectangle ACD on tire : Fig. 164.

$$\overline{x}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2 = \frac{\overline{c}^2}{4} + \overline{DC}^2,$$

or

$$CD = OD - OC = R - \sqrt[2]{\overline{R}^2 - \frac{\overline{c}^2}{4}},$$

alors dans la valeur de x, à la place de CD, mettons sa valeur, il vient :

$$\overline{x}^2 = \frac{\overline{c}^2}{4} + \left(R - \sqrt[2]{\overline{R}^2 - \frac{\overline{c}^2}{4}}\right)^2;$$

effectuant les calculs indiqués et réduisant, on a :

$$\overline{x}^2 = \overline{2R}^2 - 2R\sqrt[2]{\overline{R}^2 - \frac{\overline{c}^2}{4}}$$

d'où

$$x = \sqrt[2]{\overline{2R}^2 - 2R\sqrt[2]{\overline{R}^2 - \frac{\overline{c}^2}{4}}}.$$

Digitized by Google

Ainsi donc, ayant c, on pourra, à l'aide de la formule à laquelle on vient de parvenir, obtenir le côté du polygone inscrit d'un nombre de côtés double. Désignons par n le nombre de côtés du polygone donné, on a périm. $(P_n) = nc$; d'après la valeur de x, on a aussi :

$$\text{périm. } (P_{2n}) = n\sqrt[2]{2R^2 - 2R\sqrt[2]{R^2 - \frac{c^2}{4}}}.$$

Nous reviendrons plus tard à cette formule.

255.—Considérons maintenant les polygones circonscrits. Soit AB le côté du polygone circonscrit à la circonférence OD, il faut déterminer le côté du polygone régulier circonscrit d'un nombre de côtés double. Aux points M, N où les rayons OA, OB coupent la courbe, menons des tangentes à la circonférence, soient MQ, NP, le côté PQ est la ligne qu'il s'agit de to uver en fonction de AB et OA; de l'égalité des triangles rectangles OQM, OQD on déduit que MQ = DQ, de même NP = DP, ainsi $QM = NP = \frac{PQ}{2}$. Posons, pour abréger, $AB = c$, $OD = R$, $PQ = x$. Les triangles rectangles AMQ, AOD sont semblables puisqu'ils ont un angle commun en A, en conséquence on a $OD : MQ :: AD : AM$, ou $R : \frac{x}{2} :: \frac{c}{2} : AM$, proportion qui fournit :

Fig. 165.

$$x = \frac{4R}{c} \times AM; \quad \text{or} \quad AM = OA - OM = \sqrt[2]{R^2 + \frac{c^2}{4}} - R,$$

alors substituant sa valeur dans celle de x, il vient :

$$x = \frac{4R}{c}\left(\sqrt[2]{R^2 + \frac{c^2}{4}} - R\right).$$

Ainsi on voit que connaissant le côté $AB = c$, on aura facilement $x = PQ$ à l'aide de la formule trouvée. Désignons par n le nombre des côtés du polygone régulier circonscrit donné, on a périm. $(Q_n) = cn$, et, d'après la formule,

Digitized by Google

$$\text{périm.}\,(Q_{2n}) = 2n\frac{4R}{c}\left(\sqrt[2]{R^2 + \frac{c^2}{4}} - R\right).$$

Pour employer les formules auxquelles on vient de parvenir, il faut prendre, parmi les polygones réguliers inscrits, celui dont l'expression du côté est la plus simple en fonction du rayon; celui qui remplit cette condition est l'exagone inscrit dont le côté est égal au rayon du cercle; il reste encore à déterminer la valeur du côté du polygone circonscrit correspondant.

De la similitude des triangles AOB et MON, on tire :

$$AB : MN :: OD : OI, \quad \text{d'où} \quad AB = \frac{OD \times MN}{OI},$$

mais

$$OD = R, \quad MN = c, \quad OI = \sqrt[2]{R^2 - \frac{c^2}{4}}$$

donc

$$AB = \frac{Rc}{\sqrt[2]{R^2 - \frac{c^2}{4}}}$$

Appliquons la formule

$$AB = \frac{Rc}{\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}}$$

au cas qui nous occupe, c'est-à-dire celui où $R = c$, alors $AB = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

En résumé, si on désigne par P_6, Q_6 les polygones réguliers inscrits et circonscrits de six côtés, on a dans le cas où R est le rayon de la circonférence

$$\text{périm.}\,(P_6) = 6R, \qquad \text{périm.}\,(Q_6) = \frac{12R}{\sqrt{3}},$$

Digitized by Google

$$\text{périm. } (P_{12}) = 12R\sqrt{2\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)},$$

$$\text{périm } (Q_{12}) = 24R\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right).$$

Pour calculer le nombre, nous avons dit plus haut qu'il fallait prendre la circonférence où le rayon est l'unité, et diviser par deux la longueur de cette circonférence développée; en conséquence, dans les formules ci-dessus faisons $R = 1$ et prenons la moitié des résultats auxquels on parvient; on a ainsi une suite de nombres convergeant vers π.

Digitized by Google

Formules générales.

Nombre des côtés.	POLYGONES INSCRITS.	POLYGONES CIRCONSCRITS.	
$2n$	$\frac{1}{2}$ Périm. $(P_{2n}) = n\sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{c^2}{4}}\right)}$.	$\frac{1}{2}$ Périm. $(Q_{2n}) = n\frac{4R}{c'}\left(\sqrt{R^2+\frac{c'^2}{4}}-R\right)$.	$c' = \frac{R\times c}{\sqrt{R^2-\frac{c^2}{4}}}$.

Hypothèses, R = 1, C = 1.

12	$\frac{1}{2}$ Périm. $(P_{12}) = 6\times\sqrt{2-\sqrt{3}}$.	$\frac{1}{2}$ Périm. $(Q_{12}) = 6\times\frac{4}{c'}\left(\sqrt{1+\frac{c'^2}{4}}-1\right)$.	$c = 1$, $c' = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
24	$\frac{1}{2}$ Périm. $(P_{24}) = 12\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-\frac{c_1^2}{4}}\right)}$.	$\frac{1}{2}$ Périm. $(Q_{24}) = 12\times\frac{4}{c'_1}\left(\sqrt{1+\frac{c'^2_1}{4}}-1\right)$.	$c_1 = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $c'_1 = \frac{c_1}{\sqrt{1-\frac{c_1^2}{4}}}$.
48	$\frac{1}{2}$ Périm. $(P_{48}) = 24\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-\frac{c_2^2}{4}}\right)}$.	$\frac{1}{2}$ Périm. $(Q_{48}) = 24\times\frac{4}{c'_2}\left(\sqrt{1+\frac{c'^2_2}{4}}-1\right)$.	$c_2 = \sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{c_1^2}{4}}}$, $c'_2 = \frac{c_2}{\sqrt{1-\frac{c_2^2}{4}}}$.
96	$\frac{1}{2}$ Périm. $(P_{96}) = 48\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-\frac{c_3^2}{4}}\right)}$.	$\frac{1}{2}$ Périm. $(Q_{96}) = 48\times\frac{4}{c'_3}\left(\sqrt{1+\frac{c'^2_3}{4}}-1\right)$.	$c_3 = \sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{c_2^2}{4}}}$, $c'_3 = \frac{c_3}{\sqrt{1-\frac{c_3^2}{4}}}$.

Digitized by Google

D'après les formules inscrites dans le tableau, on voit que les calculs sont fort compliqués, aussi ce procédé, très-bon en théorie, est d'une application trop difficile pour que l'on s'en puisse servir. Telle est la méthode à suivre pour déterminer le nombre π, au moyen des périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits.

2e *Méthode.*

256.—Dans la quadrature du cercle, on a trouvé que l'aire contenue dans une circonférence a pour expression πR^2, d'où on voit que si $R = 1$, l'aire de cercle est le nombre demandé π; ainsi la question est ramenée à trouver l'aire d'une circonférence dont le rayon est l'unité.

Pour cela on va chercher, comme pour les périmètres des polygones réguliers, les aires d'une série de polygones réguliers inscrits et circonscrits à la circonférence, et lorsque celles de deux polygones réguliers du même nombre de côtés auront une différence au plus égale à l'approximation demandée, on pourra prendre l'une de ces surfaces pour celle du cercle, et on aura dans l'expression de cette aire, le rapport constant de la circonférence au diamètre. Devant trouver les aires d'une série de polygones réguliers inscrits et circonscrits, on est obligé de résoudre les deux questions suivantes.

257.—Étant donné un polygone régulier inscrit dans une circonférence, trouver l'aire du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double.

Fig. 165. Soient A et B les aires de deux polygones réguliers inscrits et circonscrits du même nombre de côtés, il faut trouver celles désignées par A′ et B′ des polygones réguliers d'un nombre de côtés double. Cherchons d'abord A′.

D'après la figure on voit que MN, AB sont les côtés correspondants des polygones réguliers donnés, dont n est le nombre des côtés. Les deux triangles MOI, MOD égaux à $\frac{A}{2n}$ et $\frac{A'}{2n}$, ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases, en conséquence on a $\frac{A}{2n} : \frac{A'}{2n} :: OI : OD :: OM : OA$ à cause des parallèles AB et MN; multipliant les deux premiers termes de la proportion par $2n$,

Digitized by Google

il vient $A : A' :: OM : OA$. Le triangle $AOD = \frac{B}{2n}$, et si on le compare au triangle MOD, on voit qu'il a même hauteur que ce dernier, alors on a la proportion $\frac{A'}{2n} : \frac{B}{2n} :: OM : OA$ ou $A' : B :: OM : OA$; maintenant remarquant que la proportion précédente et la dernière ont le rapport $OM : OA$ qui est commun, alors on en déduit $A : A' :: A' : B$, d'où $A' = \sqrt[2]{A \times B}$.

258.—Il ne reste plus qu'à déterminer B'; pour cela remarquons que les deux triangles QOA, QOD ont même hauteur, vu que leur sommet étant au même point O, leurs bases QA, QD sont sur le même côté AB, par conséquent ils fournissent la proportion $QOA : QOD :: QA : QD$, mais à cause de l'égalité des triangles QOM et QOD, la ligne QO est bissectrice de l'angle QOD, en conséquence $QA : QD :: OA : OD :: OM : OM$; substituant dans la proportion précédente au rapport $\frac{QA}{QD}$ son égal $\frac{OA}{OM}$, il vient $QOA : QOD :: OA : OM$ ou $QOA : QOD :: A' : A$, car lors de la détermination de A' on a trouvé que $\frac{A'}{A} = \frac{OA}{OM}$.

De la proportion $QOA : QOD :: A' : A$ on déduit $QOA + QOD : QOD :: A + A' : A$, mais $QOA + QOD = AOD = \frac{B}{2n}$, $QOD = \frac{B'}{4n}$; substituant ces valeurs dans la proportion, elle devient $\frac{B}{2n} : \frac{B'}{4n} :: A + A' : A$, d'où on tire $B' = \frac{2A \times B}{A + A'}$, et mettant pour A' sa valeur $\sqrt{A \times B}$, on a en définitive $B' = \frac{2A \times B}{A + \sqrt{A \times B}}$. Ainsi on voit que les polygones réguliers inscrits et circonscrits d'un même nombre de côtés étant donnés, on peut déterminer les aires des polygones réguliers d'un nombre de côtés double.

259.—En comparant les formules $A' = \sqrt{A \times B}$, $B' = \frac{2A \times B}{A + A'}$, avec celles qui donnent les périmètres des polygones réguliers, on reconnaît que cette méthode est d'un emploi beaucoup plus facile, en outre qu'on peut se rendre compte de l'approximation avec laquelle on obtient soit A' ou B', avantage que les autres formules ne

Digitized by Google

présentent point. C'est par les aires des polygones réguliers qu'on est parvenu dans la géométrie à déterminer le nombre π.

Pour rendre les calculs plus simples, il faut prendre pour A et B les polygones réguliers dont les aires ont l'expression la plus simple en fonction du rayon. Les polygones satisfaisant à cette condition sont les carrés inscrits et circonscrits, alors $A = \overline{2R}^2$, $B = \overline{4R}^2$, mais comme l'aire du cercle qu'on cherche a pour rayon l'unité, il s'ensuit que $A = 2$, $B = 4$; substituant dans les formules ces valeurs, on trouvera celles de A' et B'; ayant A', B' on déterminerait de la même manière A'' et B'', etc.

Dans la Géométrie de Legendre on trouve les résultats suivants :

Nombre des côtés.	Aires des polygones inscrits.	Aires des polygones circonscrits.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928

Par ce tableau on voit que les aires des polygones réguliers de 8192 côtés ne diffèrent que dans les décimales du septième, donc en prenant l'une de ces aires pour celle du cercle l'erreur qu'on commettra sera moindre que la différence des aires des polygones de 8192 côtés, et conséquemment se trouvera dans les décimales du septième ordre; ainsi en prenant 3,141592 pour l'aire du cercle dont le rayon est l'unité on commet une erreur moindre qu'un millionième. Donc $\pi = 3,141592$ à 0,000001 près.

On aurait obtenu π avec une approximation plus considérable en déterminant les aires de polygones réguliers d'un nombre plus grand de côtés.

Les anciens, Archimède et Métius, avaient évalué le rapport de

Digitized by Google

la circonférence au diamètre à $\frac{22}{7}$, et à $\frac{355}{113}$; $\frac{22}{7}$ est trop fort, car en développant le quotient en décimales, on trouve $\frac{22}{7} = 3,142857$, au lieu de 3,141592, nombre cité précédemment. La fraction $\frac{22}{7}$ étant beaucoup plus facile à graver dans la mémoire que la fraction décimale, on est porté à plus souvent l'employer pour la valeur de π, quand les calculs n'ont pas besoin d'une très-grande approximation.

3e *Méthode.*

260.—On appelle figures isopérimètres celles dont les périmètres sont égaux.

Ier Théorème.—*Lemme.*

Soient R, r les rayons des circonférences inscrite et circonscrite à un polygone régulier quelconque; R', r' les rayons des circonférences inscrite et circonscrite à un polygone régulier isopérimètre d'un nombre de côtés double, il faut prouver que Fig. 166.

$$R' = \sqrt{Rr'}, \quad r' = \frac{R+r}{2}.$$

Pour cela prenons le côté AB d'un polygone régulier quelconque, dont OA et OC sont les rayons des circonférences circonscrite et inscrite. Prolongeons le rayon OC jusqu'à la rencontre en E avec la circonférence OA, puis tirons les cordes EA, EB; si on abaisse du centre O des perpendiculaires sur EA, EB, et qu'on joigne entre eux leur pied, on forme le triangle MEN, qui est semblable au triangle AEB, puisque $EM = \frac{1}{2}EA$, $EN = \frac{1}{2}EB$; il suit de là que $MN = \frac{1}{2}AB$; donc le côté MN est le côté du polygone régulier isopérimètre d'un nombre double de côtés. L'angle AOB a pour mesure l'arc ADB, l'angle inscrit AEB a pour mesure la moitié de l'arc ADB; donc l'angle AEB est l'angle au centre du second polygone régulier isopérimètre du premier; par conséquent EH, EM

Digitized by Google

sont les rayons des circonférences inscrite et circonscrite. D'après les désignations indiquées ci-dessus, $EA = R$, $EC = r$, $EM = R'$, $EH = r'$, on a :

$$EH = \frac{1}{2}EC = \frac{OE + OC}{2} = \frac{R + r}{2},$$

puisque MN est parallèle à AB; en outre du triangle rectangle EOM, on tire :

$$\overline{EM}^2 = EO \times EH = R \times r',$$

ainsi $R' = \sqrt{R \times r'}$.

Donc $$R' = \sqrt{R \times r'}, \quad r' = \frac{R + r}{2},$$

théorème qu'il fallait démontrer.

Scolie. On a $r' > r$ et $R' < R$, car HC ou son égal EH est plus grand que OC, et la perpendiculaire EM est plus courte que l'oblique EO.

Corollaire. Si l'on prend le carré qui a pour côté l'unité ou 4 pour périmètre, on a :

$$r = \frac{1}{2} = 0{,}50, \quad R = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}50} = 0{,}70710,$$

à 0,00001 près. On pourra donc, au moyen des formules précédentes, calculer les rayons des circonférences circonscrites et inscrites aux polygones réguliers isopérimètres de 8, 16, 32, 64, 128, etc., côtés; on formera ainsi le tableau suivant.

Périmètre = 4.

Nombre des côtés.	Valeurs de r.	Valeurs de R.
4	0,50000	0,70710
8	0,60355	0,65428
16	0,62841	0,64072
32	0,63457	0,63764
64	0,63610	0,63687
128	0,63649	0,63668
256	0,63658	0,63663
512	0,63661	0,63662
1024	0,63661	0,63662
2048	0,63661	0,63661

Digitized by Google

PROBLÈME.

261.—Déterminer le rapport de la circonférence au diamètre.

Les circonférences inscrite et circonscrite à l'un des polygones ci-dessus étant exprimées par $2\pi r$ et $2\pi R$, on a, parce qu'une ligne convexe est moindre que toute ligne qui l'enveloppe de toutes parts, $2\pi r < 4$, $2\pi R > 4$, d'où l'on déduit $\pi < \frac{2}{r}$ et $\pi > \frac{2}{R}$. Si on pose $\pi = \frac{2}{R}$, l'erreur que l'on commet est moindre que $\frac{2}{r} - \frac{2}{R}$, d'où l'on voit que l'erreur est d'autant moindre que r est plus grand et R plus petit, c'est-à-dire que le polygone a un plus grand nombre de côtés.

Prenons pour exemple le polygone régulier de 2048 côtés, le tableau précédent donne $r > 0{,}63661$, $R < 0{,}63662$; donc

$$\frac{2}{r} < \frac{2}{0{,}63661}, \quad \frac{2}{R} > \frac{2}{0{,}63662},$$

ou bien

$$\frac{2}{r} < 3{,}1416, \quad \frac{2}{R} > 3{,}1415\ldots\ldots;$$

ainsi en posant $\pi = 3{,}1415$, l'erreur commise est moindre que 0,0001.

Après avoir exposé les diverses méthodes, que fournit la géométrie, pour déterminer le rapport constant de la circonférence au diamètre, on va développer celles que des mathématiques plus élevées fournissent pour arriver au même résultat, méthodes qui dans une pareille recherche ne sauraient être trop multipliées afin de s'assurer si les résultats auxquels on parvient ont toute l'exactitude désirable.

1re *Méthode.*

262.—L'équation d'une circonférence rapportée à son centre et à des axes rectangulaires est $x^2 + y^2 = R^2$, alors l'élément différentiel de l'arc sera

Digitized by Google

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Faisons $R = 1$, il vient :

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

intégrant, on a $s = \int_0^1 dx\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, de cette manière on calculera la longueur de la demi-circonférence, et comme le rayon est l'unité, le résultat auquel on parviendra sera, d'après ce qui a été dit plus haut, le nombre π. On a donc en conséquence $2s = 2\int_0^1 dx\,(1 = x^2)^{-\frac{1}{2}} = \pi$.

Pour intégrer $\int_0^1 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$, on va suivre la méthode des intégrations par série.

Développons $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ par le théorème de Maclaurin, il vient :

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}x^8, \text{ etc.}$$

alors l'intégrale $\int_0^x (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$ devient :

$$\int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4\frac{5}{6}\cdot + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6 + \text{etc.}\right) dx.$$

Effectuant les intégrations partielles, on a :

$$\int dx\,(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7} +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\frac{x^9}{9} + \text{etc.} + c.$$

Pour déterminer la constante, faisons $x = 0$, l'arc étant mesuré

Digitized by Google

à partir du point où l'axe des y coupe la circonférence, on a $s=0$ pour $x=0$, donc $c=0$. Ainsi l'intégrale cherchée a pour expression :

$$\int_0^x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7} + \text{etc.};$$

enfin faisons $x=1$, l'arc s sera le quart de la circonférence, par conséquent la valeur du nombre π est

$$\pi = 2\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{9} + \text{etc.}\right).$$

Simplifiant, on a enfin :

$$\pi = 2 + \frac{1}{3} + \frac{3}{20} + \frac{15}{188} + \frac{105}{1728} + \text{etc.}$$

Effectuant les calculs, on trouve $\pi = 3{,}1415926$, valeur qui ne diffère que par la septième décimale du nombre obtenu à la page 328.

2e *Méthode.*

263.—La valeur du rapport de la circonférence au diamètre peut se déduire de celle de l'intégrale définie $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$, de la manière exposée ci-après.

On a :

$$\int \sin^m x dx = \int \sin^{m-1} x \sin x = \int \sin^{m-1} x d(-\cos x);$$

intégrant par partie, il vient :

$$\int \sin^m x dx = -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1)\int \sin^{m-2} x \cos^2 x dx;$$

substituant à $\cos^2 x$ sa valeur $1-\sin^2 x$, l'égalité se transforme en

$$\int \sin^m x dx = -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1)\int \sin^m x dx + (m-1)\int \sin^{m-2} x dx;$$

réduisant, on a :

Digitized by Google

$$\int \sin^m x dx = -\frac{\cos x \sin^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x dx,$$

prenons l'intégrale entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Il vient, en remarquant que le terme $\frac{\cos x \sin^{m-1} x}{m}$ disparaît,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \frac{m-1}{m}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x dx.$$

Cette relation existera toujours entre les deux intégrales définies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x,$$

quel que soit l'exposant m, pourvu qu'il soit entier et positif.

Désignons pour abréger par Y_m, Y_{m-2}, Y_{m-4}, etc., les intégrales définies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-4} x dx,$$

d'après cela il vient :

$$Y = \frac{m-1}{m} Y_{m-2}, \quad Y_{m-2} = \frac{m-3}{m-2} Y_{m-4}, \quad Y_{m-4} = \frac{m-5}{m-4} Y_{m-6},$$

$$Y_{m-6} = \frac{m-7}{m-6} Y_{m-8}, \text{ etc.}$$

Multipliant membres à membres toutes ces égalités, et divisant les deux termes produits par les facteurs communs, on a :

$$Y = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \cdot \frac{m-5}{m-4} \cdot \frac{m-7}{m-6} \cdots\cdots \frac{m-(2n+1)}{m-(2n-2)} Y_{m-2n}.$$

L'exposant m peut être pair ou impair; supposons-le pair, ainsi $m = 2K$; dans cette hypothèse on voit par les abaissements successifs de l'exposant de $\sin x$ dans les diverses intégrales, que la dernière contiendra l'exposant zéro, en sorte qu'on a :

Digitized by Google

$$Y_m = Y_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots\cdots \frac{m-3}{m-2} \cdot \frac{m-1}{m}.$$

Dans le cas de m impair, c'est-à-dire égal à $2K+1$, l'exposant dans la dernière intégrale partielle est l'unité, en conséquence il vient :

$$Y_m = Y_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots\cdots \frac{m-3}{m-2} \cdot \frac{m-1}{m};$$

il reste à déterminer Y_0, Y_1, or on a :

$$Y_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \; Y_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1;$$

remplaçant Y_0, Y_1 par leurs valeurs dans Y_m, il vient :

$$Y_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{m-3}{m-2} \cdots\cdots \frac{m-1}{m},$$

$$Y_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots\cdots \frac{m-3}{m-2} \cdot \frac{m-1}{m}.$$

Maintenant que nous avons la valeur de l'intégrale définie dans les deux hypothèses qu'on peut faire sur l'exposant m, on va chercher à obtenir le nombre π.

De l'expression de Y_m déduisons celles de Y_{m-1} et Y_{m+1}, m étant supposé pair.

Puisque $m=2K$, $m-1$ et $m+1$ seront impairs ; en conséquence appliquant la formule trouvée dans ce cas, il vient :

$$Y_{m-1} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots\cdots \frac{m-6}{m-5} \cdot \frac{m-4}{m-3} \cdot \frac{m-2}{m-1},$$

$$Y_{m+1} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots\cdots \frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{m}{m+1}.$$

Comparons Y_m à Y_{m-1} et à Y_{m+1}, pour cela il faut réduire ces quantités au même dénominateur. Occupons-nous d'abord de Y_{m-1}, Y_m, leur réduction à un dénominateur commun donne :

Digitized by Google

$$Y_{m-1}=\frac{1.2.4.6\ldots(m-4)(m-2).2.4.6\ldots(m-4)(m-2)m}{1.3.5.7\ldots(m-5)(m-1).2.4.6\ldots(m-4)(m-2)m},$$

$$Y_m=\frac{\pi}{2}.\frac{1.3.5.7\ldots(m-3)(m-1).1.3.5\ldots(m-5)(m-3)(m-1)}{2.4.6.8\ldots(m-2)m.1.3.5\ldots\ldots(m-5)(m-3)(m-1)},$$

effectuant la même opération relativement à Y_m et Y_{m+1}, on a :

$$Y_m=\frac{\pi}{2}.\frac{1.3.5.7\ldots(m-3)(m-1)1.3.5.7\ldots(m-3)(m-1)(m+1)}{2.4.6\ldots\ldots(m-2)m.1.3.5.7\ldots\ldots(m-2)(m-1)(m+1)},$$

$$Y_{m+1}=\frac{1.2.4.6\ldots\ldots(m-2)m.2.4.6.8\ldots\ldots(m-2)(m-1)}{1.3.5.7\ldots\ldots(m-1)(m+1)2.4.6.8\ldots\ldots(m-2)m}.$$

A l'inspection des fractions représentant Y_m, Y_{m-1}, Y_{m+1}, on voit que $Y_m < Y_{m-1}$, et que $Y_m > Y_{m+1}$; donc Y_m est compris entre Y_{m-1} et Y_{m+1}.

Ainsi on a $Y_m < Y_{m-1}$ et $Y_m > Y_{m+1}$; divisant les deux membres de chaque inégalité par les facteurs, ces inégalités donnent :

$$\frac{\pi}{2}<\frac{2^2.4^2.6^2\ldots.(m-4)^2(m-2)^2m}{3^2.5^2.7^2\ldots.(m-3)^2.(m-1)^2},$$

$$\frac{\pi}{2}>\frac{2^2.4^2.6^2\ldots.(m-2)^2(m-2)^2.m}{3^2.5^2.7^2\ldots.(m-3)^2(m-1)^2.(m+1)}.$$

Les seconds membres des inégalités ont un facteur commun; désignons-le par P, alors on a :

$$\frac{\pi}{2}<P \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2}>P\left(1-\frac{m}{m+1}\right);$$

quel que soit le nombre π, il existe un nombre entre 0 et 1 pour lequel on a l'égalité $\frac{\pi}{2}=P\left(1-\frac{\theta m}{m+1}\right)$.

Mettant pour P sa valeur, il vient :

$$\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3}.\frac{16}{15}.\frac{36}{35}.\frac{64}{63}\ldots.\frac{(m-2)^2}{(m-3)(m-1)}.\frac{m}{m-1}\left(1-\frac{\theta m}{m+1}\right);$$

Digitized by Google

d'où on tire pour valeur du nombre cherché :

$$\pi = \frac{8}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdots \frac{4K^2}{4K^2-1} \cdots \frac{(m-2)^2}{(m-3)(m-1)} \cdot \frac{m}{m-1}\left(1 - \frac{\theta m}{m+1}\right).$$

Le terme général $\frac{4K^2}{4K^2-1}$ donnera tous les termes intermédiaires entre $\frac{8}{3}$ et $\frac{m}{m-1}\left(1 - \frac{\theta m}{m+1}\right)$. Dans cette formule, dont la loi de formation des facteurs est fort simple, le nombre m est pair.

Si pour valeur de π on prend l'expression 2P, l'erreur que l'on commet est moindre que $\frac{2Pm}{m+1}$. Ainsi, au moyen de cette formule, déduite de l'intégrale définie $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$, on peut obtenir le rapport de la circonférence au diamètre avec toute l'approximation désirable.

Rectification de la circonférence.

264.—On vient de voir comment, à l'aide de considérations géométriques, on a pu obtenir l'expression de la longueur de la circonférence développée ; on se propose en ce moment de résoudre la même question à l'aide du calcul.

L'équation de la circonférence, rapportée à son centre et à des axes rectangulaires, est

$$x^2 + y^2 = R^2 ;$$

celle de l'élément différentiel d'un arc de courbe quelconque est

$$dS = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = dx\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

appliquant cette formule à l'équation $x^2 + y^2 = R^2$, il vient :

$$dS = dx\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} = dx R \frac{1}{y}.$$

Or $\quad y = \sqrt{R^2 - x^2}$; $\quad$ donc $\quad dS = R dx (R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$;

Digitized by Google

intégrant, on a : $$S = R\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

intégrale qu'on peut mettre sous la forme :

$$S = R\int_0^x \frac{d\frac{x}{R}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}};$$

effectuant l'intégration indiquée, on a $S = R \operatorname{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right) + c$; la constante c est ici nulle, puisque pour $x = 0$, $S = 0$. Ainsi le calcul nous donne $S = R \operatorname{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)$. Par cette méthode on ne peut avoir l'arc S tant que l'on ne connaît pas le rapport de la circonférence au diamètre ; mais on peut obtenir sa longueur au moyen d'une série, en fonction du sinus $\frac{x}{R}$. On a trouvé que

$$\operatorname{arc}(\sin x) = 1 + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Alors remplaçant x par $\frac{x}{R}$, il vient :

$$S = R\left(1 + \frac{1.x^3}{2.3R^3.} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5R^5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\frac{x^7}{7R^7} + \text{etc.}\right).$$

Dans cette série l'arc S est donné en fonction de la corde qui le sous-tend, et dont $2x$ est la longueur.

De la formule $S = R \operatorname{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)$ on déduit $S' = R' \operatorname{arc}\left(\sin\frac{x'}{R'}\right)$,

alors $$\frac{S}{S'} = \frac{R}{R'}\,\frac{\operatorname{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)}{\operatorname{arc}\left(\sin\frac{x'}{R'}\right)}.$$

Digitized by Google

Supposons $\frac{x}{R}=\frac{x'}{R'}$, l'égalité devient $\frac{S}{S'}=\frac{R}{R'}$, l'hypothèse $\frac{x}{R}=\frac{x'}{R'}$ donne, en désignant par OA, OA′ les rayons R, R′, par OP et OP′ les abscisses x, x', $\frac{OC}{OP}=\frac{OC'}{OP'}$; d'où il suit que les triangles rectangles OCP, OC′P′ sont semblables. Donc les points O, C, C′ sont en ligne droite; ainsi les arcs CA, C′A′, qui dans le calcul sont représentés par S, S′, correspondent au même angle au centre, et sont entre eux comme les rayons des circonférences auxquelles ils appartiennent. Ces arcs sont dits semblables. Donc les arcs semblables sont entre eux comme les rayons des circonférences dont ils font partie. Fig. 167.

Dans l'équation $S=\text{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)R$ faisons $x=R$, l'arc correspondant à cette abscisse est un quadrant; donc si on désigne par π la demi-circonférence, on a $S=\frac{1}{2}\pi R$, et la circonférence entière est alors égale à $2\pi R$.

Quadrature du cercle.

265.—L'expression différentielle d'une surface plane est ydx, et dans le cas qui nous occupe $dx\sqrt{R^2-x^2}$; en désignant par A la portion du cercle comprise entre l'axe des y et l'ordonnée correspondant à l'abscisse x, on a $A=\int_0^x dx\,(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$; ainsi la question est ramenée à intégrer $\int dx\,(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

On a :

$$\int_0^x dx\,(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=\int_0^x\frac{dx\,(R^2-x^2)}{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\int_0^x\frac{R^2dx}{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}-\int_0^x\frac{R^2dx}{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'intégrale $\int_0^x\frac{R^2dx}{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ a pour expression $R^2\text{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)$.

L'intégrale $\int_0^x\frac{-x^2dx}{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=x\,(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-\int_0^x dx\,(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$; en

Digitized by Google

conséquence, substituant dans l'intégrale cherchée l'expression de chacune de celles qui la composent, on a :

$$\int_0^x (R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = R^2\text{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)+x(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-\int_0^x dx(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}};$$

résolvant cette équation par rapport à $\int_0^x (R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$, il vient :

$$\int_0^x (R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}R^2\text{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)+\frac{1}{2}x(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+c,$$

la constante c est nulle, car pour $x=0$ $A=0$.

Fig. 167. Telle est l'expression de l'aire du trapèze curviligne CAOP. On peut arriver directement à cette formule, car la figure CAOP se compose des deux aires OCA et OCP; l'aire OCP est égale à $\frac{1}{2}OP \times CP = \frac{1}{2}x\sqrt{R^2-x^2}$; ensuite OCA a pour expression $\frac{1}{2}R$ multiplié par l'arc qui lui sert de base; or l'arc AC a pour sinus OP, et du triangle rectangle OAP on tire $OP = AO \times \sin(AOC)$; donc $\sin(AOC) = \frac{x}{R}$. Alors $R\,\text{arc}\sin\left(\frac{x}{R}\right)$ est l'arc AC; par conséquent $COA = \frac{1}{2}R^2\text{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)$; donc l'aire CAOP a pour expression $\frac{1}{2}R^2\text{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{R^2-x^2}$.

Dans l'expression de l'intégrale cherchée faisons $x=R$, la surface qui s'en déduit est celle du quadrant, alors celle du cercle a pour expression πR^2.

L'équation

$$A=\int_0^x dx(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}R^2\text{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)+\frac{1}{2}x(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

montre que si on ne suppose pas connu le rapport de la circonférence au diamètre, le calcul ne résout pas le problème de la quadrature du cercle, à cause du terme $\frac{1}{2}R^2\text{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)$.

L'aire d'un secteur a pour expression $\frac{1}{2}R^2\text{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)$; elle se

Digitized by Google

déduit de l'aire A en retranchant le triangle OCP dont la valeur est $\frac{1}{2}x\sqrt{R^2-x^2}$. Ainsi donc sect. COA $=\frac{1}{2}R^2\text{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)$. Pour une autre circonférence on aurait sect. C'OA' $=\frac{1}{2}R'^2\text{arc}\left(\sin\frac{x'}{R'}\right)$;

alors
$$\frac{\text{sect. COA}}{\text{sect. C'OA'}}=\frac{R^2\text{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)}{R'^2\text{arc}\left(\sin\frac{x'}{R'}\right)}.$$

Supposons $\frac{x}{R}=\frac{x'}{R'}$, les points C, C', O sont en ligne droite, et les angles au centre COA, C'OA' sont égaux, l'égalité devient : $\frac{\text{sect. COA}}{\text{sect. C'OA'}}$. Donc les aires de deux secteurs semblables sont entre elles comme les carrés des rayons des cercles dont ils font partie. Fig. 167.
L'aire du segment CMA a pour valeur l'aire CAOP diminuée de l'aire du trapèze CAOP. En conséquence,

aire seg. CMA $=\frac{1}{2}R^2\text{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{R^2-x^2}-\frac{1}{2}x\left(R+\sqrt{R^2-x^2}\right)$;

simplifiant, il vient :

$$\text{aire seg. (CMA)}=R^2\text{arc}\left(\sin\frac{x}{R}\right)-\frac{1}{2}Rx\ ;$$

l'expression $\frac{1}{2}Rx$ est l'aire du triangle CAO. D'où on voit que, pour avoir l'aire du segment, il faut de l'aire du secteur retrancher celle du triangle qui a pour base la corde de l'axe du secteur et son sommet au centre du cercle.

Ellipse.

266.—L'aire d'une ellipse est équivalente à l'aire d'un cercle qui a pour rayon une moyenne proportionnelle entre les demi-axes.

Pour le démontrer, soit une ellipse dont AA', BB' sont les axes; Fig. 168.
sur AA' comme diamètre décrivons une circonférence, et dans la

Digitized by Google

partie au-dessus du diamètre AA′ inscrivons un polygone quelconque ACDEFA′ ; par ses sommets menons les ordonnées à l'axe AA′, ces lignes coupent l'ellipse en C′, D′, E′, F′ ; si on joint ces points deux à deux, on forme le polygone A′C′D′E′F′A qui est inscrit à l'ellipse.

A l'inspection de la figure on voit que ces polygones sont décomposés en un même nombre trapèzes ; désignons ceux qui composent le demi-cercle par T, T′, T″, T‴, et par T_1', T_1'', T_2'' ceux qui leur correspondent dans l'ellipse, on a :

$$T' = \frac{CP + DQ}{2} \times PQ, \quad T_1' = \frac{C'P + D'Q}{2} \times PQ,$$

donc
$$\frac{T'}{T_1'} = \frac{CP + DQ}{C'P + D'Q}.$$

Or on a démontré que CP:C′P::DQ:D′Q::OA:OB, d'où

$$\frac{CP + DQ}{C'P + D'Q} = \frac{OA}{OB}.$$

En conséquence $\frac{T'}{T_1'} = \frac{OA}{OB}$; d'après cela on a la suite de rapports égaux $T:T_1::T':T_1'::T'':T_1''::T''':T_1'''$.....::etc. qui donne :

$$\frac{T + T' + T'' + T'''}{T_1 + T_1' + T_1'' + T_1'''} = \frac{OA}{OB}; \quad \text{donc} \quad \frac{\text{polyg.}(P)}{\text{polyg.}(P')} = \frac{OA}{OB}.$$

L'égalité à laquelle on vient de parvenir existe quel que soit le nombre n des côtés. Plus ce nombre croîtra, plus les polygones s'approcheront du demi-cercle et de l'aire de la demi-ellipse. Donc, d'après le théorème démontré sur les limites, la même égalité subsiste entre les limites du polygone P et du polygone P′ ; donc

$$\frac{\text{cer.}OA}{\text{ell.}(OA, OB)} = \frac{OA}{OB}.$$

Si sur le demi-axe OB comme diamètre, on décrit une circonférence, on démontrerait par les mêmes raisonnements que ci-des-

Digitized by Google

sus, que $\frac{\text{ell.}(OA, OB)}{\text{cer.}(OB)} = \frac{OA}{OB}$. De ces deux égalités on déduit $\frac{\text{cer.}(OA)}{\text{ell.}(OA, OB)} = \frac{\text{ell.}(OA, OB)}{\text{cer.}(OB)}$; ce qui démontre que

$$\text{ell.}(OA, OB) = \sqrt{\text{cer.}(OA) \times \text{cer.}(OB)} = \pi \,.\, OA \times OB.$$

Donc l'aire d'une ellipse est équivalente à celle d'un cercle qui a pour rayon une moyenne proportionnelle entre les demi-axes.

Aire du segment elliptique.

267.—On appelle segment elliptique la portion de l'aire d'une ellipse comprise entre une corde et l'arc qu'elle sous-tend sur cette courbe.

Prolongeons l'ordonnée QD′ jusqu'en D, on détermine ainsi le segment $D'C'A'C_1'D_1'$, et le segment circulaire $DCAC_1D_1$. En prolongeant l'ordonnée CP jusqu'en C_1, et joignant les points A, C_1, P_1 deux à deux ainsi que les points A, C_1', P_1', on inscrit, dans le segment circulaire et dans le segment elliptique, deux polygones du même nombre de côtés, qui sont, en vertu du théorème démontré plus haut, dans le rapport de OA à OB ; et comme cette relation d'égalité existe, quel que soit le nombre de leurs côtés, on en conclut que leurs limites, le segment circulaire et le segment elliptique sont entre eux comme OA à OB ; ainsi Fig. 168.

$$\frac{\text{seg. ellipt.}(D'C'AD_1'C_1')}{\text{seg. circul.}(DCAD_1C_1)} = \frac{OB}{OA}.$$

Comme on sait maintenant évaluer l'aire d'un segment circulaire, il s'ensuit qu'on peut, au moyen de cette égalité, calculer l'aire d'un segment elliptique.

Aire d'un secteur elliptique.

268.—On appelle secteur elliptique la portion de la surface d'une ellipse comprise entre un arc de cette courbe et les deux diamètres aboutissant à ses extrémités.

Digitized by Google

Nous allons considérer un secteur qui soit divisé en deux parties égales par l'un des axes de la courbe, comme on l'a fait pour le segment. En conséquence prenons le secteur $D'OD_1'$; on voit qu'il se compose de deux parties du segment $D'C'AC_1'D_1'$ et du triangle $D'OD_1'$; le secteur circulaire DOD_1 se compose également de deux parties correspondant à celles du secteur elliptique. On a démontré que $\frac{\text{seg.}(DCAC_1D_1)}{\text{seg.}(D'C'AC_1'D_1')} = \frac{OA}{OB}$; les deux triangles DOD_1, $D'OD_1'$ sont donc évidemment dans le rapport de DQ à D'Q ou dans celui de OA à OB ; donc :

Fig. 168.

$$\frac{\text{tri.}(DOD_1)}{\text{tri.}(D'OD_1')} = \frac{OA}{OB}.$$

Réunissant ces deux égalités, il vient :

$$\text{seg.}(DCAC_1D_1) : \text{seg.}(D'C'AC_1'D_1') :: \text{tri.}(DOD_1) : \text{tri.}(D'OD_1') ;$$

d'où
$$\frac{\text{seg.}(DCAC_1D_1) + \text{tri.}(DOD_1)}{\text{seg.}(D'C'AC_1'D_1') + \text{tri.}(D'OD_1')} = \frac{OA}{OB}.$$

Or les termes de la fraction constituant le premier membre de cette égalité sont les secteurs dont il s'agit ; donc

$$\frac{\text{sect. ell.}(D'OD_1')}{\text{sect. circ.}(DOD_1)} = \frac{OA}{OB}.$$

Donc, à l'aide de cette relation, on pourra calculer un secteur elliptique quelconque dont la corde de l'arc sera perpendiculaire à l'un des axes de la courbe. Si on désigne par a, b les demi-axes d'une ellipse et par S l'aire de cette courbe, on a $S = \pi ab$. Désignons en outre par a', b' les longueurs de deux demi-diamètres conjugués faisant entre eux un angle α ; on sait que $ab = a'b' \sin\alpha$, donc $S = \pi a'b' \sin\alpha$. Or si de l'extrémité du diamètre b' on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre a', cette ligne a pour longueur $b' \sin\alpha$. Donc l'aire d'une ellipse est équivalente à celle d'un cercle qui aurait pour rayon une moyenne proportionnelle entre un demi-diamètre quelconque et la distance, de l'extrémité de son conjugué, à ce diamètre. On va démontrer ce théorème directement.

Digitized by Google

Soient BB′, AA′ deux diamètres conjugués, sur BB′ décrivons une circonférence, puis aux points O, P, Q, menons des perpendiculaires à BB′, ces lignes coupent la circonférence aux points C, D, E, B, qui joints deux à deux forment avec les rayons OC, OB′ une portion de polygone inscrit; par les points P, Q menons les parallèles PC′, QD′ à OA′, et joignons les points A′, C′, D′, B′ deux à deux, on forme ainsi une portion de polygone qui est inscrite à l'ellipse. Fig. 169.

Désignons pour abréger, les trapèzes OCDP, PDEQ, QEB′ par T, T′, T″ et les trapèzes correspondants dans l'ellipse par T_1, T_1', T_2''; si au point O on élève une perpendiculaire OS à AA′, on aura $T_1 = \frac{OA' + PC'}{2} \times OH$, ensuite $T = \frac{OC + DP}{2} \times OP$. Prenons le milieu R de OP et menons par ce point les lignes RI perpendiculaire à BB′ et RI′ parallèle à AA′, alors

$$\frac{OA' + OC'}{2} = RI', \quad \frac{OD + OC}{2} = RI,$$

donc $T = RI \times OP$ et $T_1 = RI' \times OH$. Donc

$$\frac{T}{T_1} = \frac{RI \times OP}{RI' \times OH}.$$

Si on suppose les points de division infiniment rapprochés, les points I, I′ peuvent être considérés comme appartenant aux courbes, alors en vertu de théorèmes démontrés, on a :

$$\frac{\overline{RI}^2}{\overline{OB}^2 - \overline{OR}^2} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OB}^2}, \quad \frac{\overline{RI'}^2}{\overline{OB}^2 - \overline{OR}^2} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2},$$

donc
$$\frac{RI}{RI'} = \frac{OB}{OA}.$$

En outre, à cause des triangles semblables HOP, LOB′ on a $\frac{OP}{OH} = \frac{OB'}{OL}$; si on considère les deux triangles semblables LOB′, AOK, on en tire $\frac{OB'}{OL} = \frac{OA'}{A'K}$, en conséquence les deux dernières égalités donnent :

Digitized by Google

$$\frac{T}{T_1} = \frac{RI \times OP}{RI' \times OH} = \frac{OB}{OA} \times \frac{OA'}{A'K} = \frac{OB}{A'K}.$$

On aurait trouvé pareillement $\frac{T'}{T_1'} = \frac{OB}{A'K}$, donc

$$\frac{T+T'+T''+\ldots}{T_1+T_1'+T_1''+\ldots} = \frac{OB}{AK} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{polyg. (COB'ED)}}{\text{polyg. (AOB'D'C')}} = \frac{OB}{AK}.$$

Passant aux limites, on a :

$$\frac{\text{cer. (OB)}}{\text{ell.(OB,OA)}} = \frac{OB}{A'K}, \quad \text{d'où} \quad \text{ellip. (OA,OB)} = \pi OB \times A'K.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Aire d'un segment elliptique quelconque.

269.—Prolongeons l'ordonnée PC' jusqu'en C_1', et l'ordonnée PD jusqu'en D_1. On démontrerait comme précédemment que

Fig. 169.

$$\frac{\text{seg. ell. (C'B'C}_1'\text{)}}{\text{seg .cir. (DB'D}_1\text{)}} = \frac{OB}{A'K}.$$

Donc l'aire d'un segment elliptique quelconque peut être déterminée quand on donne les deux diamètres conjugués relatifs à la corde sous-tendant l'arc qui le détermine, et la longueur de cette corde.

Aire d'un secteur quelconque.

Joignons le centre aux points C' et C_1', puis à D et D_1, on forme ainsi deux secteurs, l'un elliptique et l'autre circulaire. D'après la figure, on voit que sect. ell. (C'B'C_1') = tri. (C'OC_1') + seg. ell. (C'B'C_1') et sect. cir. (DB'D_1) = tri. (DOD_1) + seg. cir. (OB'D_1). Les deux triangles DOD_1, C'OC_1' sont entre eux comme les produits PD × OP et PC' × OH. Or on a prouvé plus haut que ces produits sont dans le rapport de OB à OA. Donc

Fig. 169.

Digitized by Google

$$\frac{\text{tri. (DOD}_{\text{I}})}{\text{tri. (C'OC}_{\text{I}}')} = \frac{\text{OB}}{\text{A'K}};$$

et comme on a :

$$\frac{\text{seg. cir. (DB'D}_{\text{I}})}{\text{seg. ell. (C'B'C}_{\text{I}}')} = \frac{\text{OB}}{\text{A'K}},$$

il s'ensuit que

$$\frac{\text{tri. (DOD}_{\text{I}}) + \text{seg. cir. (DB'D}_{\text{I}})}{\text{tri. (C'OC}_{\text{I}}') + \text{seg. ell. (C'B'C}_{\text{I}}')} = \frac{\text{OB}}{\text{A'K}},$$

c'est-à-dire que

$$\frac{\text{sect. ell. (C'OC}_{\text{I}}')}{\text{sect. cir. (DOD}_{\text{I}})} = \frac{\text{A'K}}{\text{OB}}.$$

En résumé on voit que les quadratures de l'ellipse, d'un secteur et d'un segment elliptique, se ramènent à celles du cercle, des secteurs et segments circulaires.

L'expression générale de l'aire d'une ellipse est celle d'un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre un demi-diamètre, et la distance de l'extrémité de son conjugué à ce diamètre. Si les deux diamètres conjugués sont les axes, cette distance est le demi second axe de la courbe, et l'aire a pour expression celle du cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre les demi-axes.

Du théorème qu'on vient d'énoncer, il résulte que si deux ellipses ont un diamètre commun, leurs aires sont entre elles comme les distances de ce diamètre aux extrémités de ceux qui lui sont conjugués dans ces ellipses ; si ces distances sont égales les ellipses sont équivalentes.

270.—Nous allons appliquer le calcul à la recherche de l'expression de l'aire d'une ellipse. Soient a', b' deux diamètres conjugués faisant entre eux l'angle α.

L'équation de l'ellipse rapportée à ces deux diamètres est $a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$, d'où on tire $y = \frac{b'}{a'}(a'^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. L'expression différentielle d'une surface plane est $y \sin \alpha dx$, α étant l'angle des axes de coordonnées, donc en désignant par S une portion d'aire ellip-

Digitized by Google

tique comprise entre l'axe des y et l'ordonnée correspondant à l'abscisse x, on a :

$$S = \int_0^x \frac{b'}{a'} \sin\alpha \, (a'^2 - x'^2) \, dx ;$$

intégrant, il vient :

$$S = \frac{b'}{a'} \sin\alpha \left[\frac{1}{2} x\sqrt{a'^2 - x^2} + \frac{1}{2} a'^2 \operatorname{arc}\left(\sin \frac{x}{a'}\right)\right] + c,$$

la constante c est nulle, car pour $x = 0$, $S = 0$ puisque les aires sont comptées à partir de l'axe des y.

Faisons, dans la valeur de S, $x = a'$, il vient :

$$S = \frac{1}{2} \frac{b'}{a'} \sin\alpha \times \frac{1}{2} \pi a'^2 = \frac{\pi a' b' \sin\alpha}{4},$$

et par suite la surface totale de l'ellipse a pour expression $\pi a' b' \sin\alpha$.

Pour déduire de la formule générale celle d'un segment, il faut retrancher de l'égalité $S_1 = \frac{\pi a' b' \sin\alpha}{4}$ l'intégrale générale membre à membre, et multiplier les deux membres de celle qu'on obtient par 2, d'après cela il vient :

$$2\,(S_1 - S) = \text{seg. ell. } (C'B'C_1') =$$

$$= 2\left\{\frac{\pi a' b' \sin\alpha}{4} - \left[\frac{b'}{a'} \sin\alpha \frac{1}{2} x\sqrt{a'^2 - x'^2} + \frac{1}{2} a'^2 \operatorname{arc}\left(\sin\frac{x}{a'}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{b'}{a'} \sin\alpha \left[\frac{1}{2} \pi a'^2 - x\sqrt{a'^2 - x^2} - a'^2 \operatorname{arc}\sin\left(\frac{x}{a'}\right)\right] ;$$

Fig. 169. on voit que la partie entre crochets est l'aire d'un segment circulaire dont le rayon est a' et dont l'abscisse de l'extrémité de l'arc est x, celle de l'extrémité du segment elliptique ; donc

$$\frac{\text{seg. ell. } (C'B'C_1')}{\text{seg. cir. } (DB'D_1)} = \frac{b'}{a'} \sin\alpha.$$

Cherchons l'aire d'un secteur elliptique, soit le secteur $C'OC_1'$

Digitized by Google

dont on demande l'aire, on voit qu'ayant l'expression de celle du segment $C'B'C_1'$, il suffit d'y ajouter l'aire du triangle $C'OC_1'$ dont l'expression est $PC' \times OP \sin\alpha = \frac{b'}{a'} x \sin\alpha \sqrt{a'^2 - x^2}$. En conséquence, on a :

$$\text{sect. ell. } (C'OC_1') = \frac{b'}{a'} \sin\alpha \left[\frac{1}{2}\pi a'^2 - x\sqrt{a'^2 - x^2} - a'^2 \arcsin\left(\frac{x}{a'}\right)\right] +$$

$$+ \frac{b'}{a'} x \sin\alpha \sqrt{a'^2 - x^2};$$

réduisant, il vient :

$$\text{sect. ell. } (C'OC_1') = \frac{b'}{a'} \sin\alpha \left[\frac{1}{2}\pi a'^2 - a'^2 \arcsin\left(\frac{x}{a'}\right)\right].$$

Or le facteur entre crochets est l'aire du secteur circulaire dont le rayon est a', et dont l'extrémité de l'arc a même abscisse x que celle de l'extrémité de l'arc du secteur elliptique, donc on a :

$$\frac{\text{sect. ell. } (C'OC_1')}{\text{sect. cir. } (DOD_1)} = \frac{b'}{a'} \sin\alpha.$$

On voit que les résultats donnés par des considérations géométriques se déduisent aisément de l'intégrale générale

$$S = \frac{b'}{a'} \sin\alpha \left[\frac{1}{2} x' \sqrt{a'^2 - x^2} + \frac{1}{2} a'^2 \arcsin\left(\frac{x}{a'}\right)\right].$$

Supposons les diamètres conjugués rectangulaires, ainsi $\alpha = 90°$, $\sin\alpha = 1$, alors ils deviennent dans cette hypothèse les axes, l'expression de l'aire de l'ellipse qui s'ensuit est $S = \pi ab$.

Rectification de l'ellipse.

271.—L'expression différentielle d'un arc de courbe est

$$dS = dx \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

Digitized by Google

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes étant $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, pour avoir l'élément d'un arc elliptique tirons $\frac{dy}{dx}$ de l'équation de la courbe, et substituons-en la valeur dans l'expression générale de dS, il vient :

$$dS=dx\left(1+\frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}}=dx\left(\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Substituant à y^2 sa valeur $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, on a :

$$dS=dx\left[\frac{a^4\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)+b^4x^2}{a^2b^2(a^2-x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}=dx\left[\frac{a^4b^2-b^2x^2(a^2-b^2)}{a^2b^2(a^2-x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[\frac{a^4-x^2(a^2-b^2)}{a^2(a^2-x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}dx.$$

Par conséquent

$$S=\int_0^x\left[\frac{a^4-x^2(a^2-b^2)}{a^2(a^2-x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}dx.$$

Cette intégrale ne permettant pas d'obtenir la valeur de l'arc, nous exposerons plus tard une autre méthode qui donne par approximation les longueurs des arcs d'une courbe déterminée, alors celles des arcs de l'ellipse s'en déduiront comme un cas particulier.

Hyperbole.

272.—Dans une hyperbole on appelle *segment*, l'espace compris entre un arc et la corde de cet arc.

On donne le nom de *secteur* à l'espace compris entre deux diamètres et l'arc qu'ils interceptent sur la même branche.

Un segment et un secteur sont dits *correspondants*, lorsqu'ils sont déterminés par le même arc.

Digitized by Google

Ier Théorème.

273.—Tout diamètre dans l'hyperbole qui divise la corde d'un arc en deux parties égales partage le segment et le secteur correspondant chacun en deux parties équivalentes.

Soit l'hyperbole (MNP, M'N'P'), prenons l'arc CMD et tirons le diamètre OI passant au milieu I de la corde CD, il faut prouver que les deux surfaces CIN, NID sont équivalentes. Fig. 170.

Pour cela, sur la ligne OI prenons plusieurs points entre N et I, soient H, F, G, etc., et menons par ces points des parallèles à la corde CD. Ces lignes coupent la courbe en B, B', B'', B_1, B_1', B_1''; joignant ces points deux à deux on forme les deux polygones INBB'B'' et $INB_1B_1'B_1''$, qui sont équivalents, car ils se composent de trapèzes deux à deux équivalents, comme ayant des bases égales et même hauteur. En conséquence si on désigne le premier polygone par P et le second par P', on a polyg. P = polyg. P'. Cette égalité existe quel que soit le nombre des côtés ; alors si on le fait augmenter, les polygones P, P' iront en convergeant vers leurs limites, les triangles mixtilignes INC, IND. Alors d'après le théorème démontré sur les limites de deux quantités variables toujours égales, on a aire (INC) = aire (IND). Donc le segment CMD est divisé par le diamètre OI en deux parties équivalentes.

Démontrons maintenant que le secteur OCMD est divisé par le diamètre OI en deux parties équivalentes. Les deux triangles OIC, OID sont équivalents comme ayant des bases égales IC, ID et même hauteur, leurs sommets étant au même point O, et leurs bases sur la même ligne. Donc si du triangle OIC on retranche la surface INC, le reste, le secteur ONC, est équivalent à ce qui reste du triangle OID quand on en a enlevé la surface IND, c'est-à-dire le secteur OND. Donc si on joint le milieu de la corde de l'arc d'un secteur au centre, le diamètre qu'on obtient divise ce secteur en deux parties équivalentes, ainsi que le segment formé par la corde.

IIe Théorème.

274.—Dans une hyperbole, si deux segments ou deux secteurs sont déterminés par deux arcs compris entre deux parallèles, ces segments ou ces secteurs sont équivalents.

Soient deux lignes parallèles RR', PP' déterminant deux arcs Fig. 170.

Digitized by Google

formant les secteurs PORS, P'OR'S', et les deux segments PRS, P'R'S'. Il faut prouver que seg.(PRS) = seg.(P'R'S') et que sect.(PORS) = sect.(P'OR'S'). A cet effet, joignons le milieu K de la corde RR' au centre O, le diamètre OK passera au milieu de la corde PP'. Il suit de là que les triangles mixtilignes PK'N', P'K'N' sont équivalents, ainsi que RKN', R'KN'. Donc

$$\text{tri.mixt.}(PK'N') - \text{tri.mixt.}(RK'N') = \text{tri.mixt.}(P'K'N') - \\ - \text{tri.mixt.}(R'KN'),$$

égalité qui se réduit à

$$\text{trap.mixt.}(P'K'KR) = \text{trap.mixt.}(P'K'KR').$$

Les trapèzes ordinaires PK'KR, P'K'KR' étant équivalents comme ayant des bases égales et même hauteur, on a :

$$\text{trap.mixt.}(PK'KR) - \text{trap.recti.}(PK'KR) = \text{trap.mixt.}(P'K'KR') - \\ - \text{trap.recti.}(P'K'KR')$$

ou $$\text{seg.}(PRS) = \text{seg.}(P'R'S').$$

Les lignes PP', RR' ayant pour milieux les points K', K, les cordes PR, P'R' vont couper le diamètre OK au même point. Les triangles OQP, OQP' qu'on vient de former sont équivalents comme ayant même base OQ, et même hauteur, car leurs hauteurs étant les perpendiculaires TP, T'P' à OQ, on a :

$$TP = PK' \sin\alpha, \qquad T'P' = P'K' \sin\alpha;$$

et comme PK = P'K' par construction, TP = T'P'. Les triangles OQP, OQP' sont équivalents pour les mêmes motifs que ci-dessus. En conséquence,

$$\text{tri.}(OPQ) - \text{tri.}(ORQ) = \text{tri.}(OP'Q) - \text{tri.}(OR'Q),$$

ou en réduisant,

$$\text{tri.}(POR) = \text{tri.}(P'OR').$$

Digitized by Google

Retranchant de ces triangles les segments correspondants qu'on a démontrés équivalents, il en résulte :

$$\text{sect.}(P'OR'S') = \text{sect.}(PORS).$$

Ce qu'il fallait prouver.

Il y a égalité entre ces secteurs et entre ces segments, lorsque les parallèles qui les déterminent sont perpendiculaires sur les diamètres qui les divisent en deux parties égales. Pour le prouver il suffit de faire tourner la partie supérieure de l'hyperbole autour du diamètre qui est dans ce cas l'axe transverse, de manière à la rabattre sur la partie inférieure. Dans cette position on démontre aisément que les secteurs et les segments coïncident.

IIIe Théorème.

275.—Si dans deux hyperboles différentes, deux secteurs ou deux segments sont déterminés par deux arcs ayant même corde et une tangente commune parallèle à cette corde, ces segments ou ces secteurs sont équivalents.

Soient APB, AQB deux arcs d'hyperboles différentes, ayant même corde AB et une tangente commune PQ parallèle à AB, il faut prouver que Fig. 171 *bis*.

$$\text{seg.}(APB) = \text{seg.}(AQB) \quad \text{et} \quad \text{sect.}(AOB) = \text{sect.}(AO'B).$$

Pour cela joignons les points de contact P, Q au milieu de la corde AB, les lignes MP, MQ sont deux diamètres, soient P', Q' leurs secondes extrémités. Aux points P', Q les tangentes aux hyperboles respectives sont parallèles à la tangente PQ, et de plus ne font qu'une même ligne droite. Il suit de là que les centres O, O' des deux hyperboles sont sur une même ligne parallèle à PQ. Cela étant, tirons la ligne HR parallèle à PQ, les cordes HR, H'R' sont des ordonnées relatives aux diamètres OM, O'Q ; en conséquence on a les deux égalités

$$\frac{\overline{HR}^2}{\overline{AM}^2} = \frac{RP \times RP'}{MQ \times MQ'} = \frac{\overline{OR}^2 - \overline{OP}^2}{\overline{OM}^2 - \overline{OP}^2}, \quad \frac{\overline{H'R'}^2}{\overline{AM}^2} = \frac{\overline{OR'}^2 - \overline{O'Q}^2}{\overline{O'M}^2 - \overline{O'Q}^2}.$$

A cause des parallèles OO', PQ, RR', on a :

Digitized by Google

$$\frac{\overline{OM}^2}{\overline{O'M}^2}=\frac{\overline{PM}^2}{\overline{QM}^2}=\frac{\overline{OP}^2}{\overline{O'Q}^2},$$

d'où on déduit :

$$\frac{\overline{OM}^2-\overline{OP}^2}{\overline{O'M}^2-\overline{O'Q}^2}=\frac{\overline{OR}^2-\overline{OP}^2}{\overline{O'R}^2-\overline{O'Q}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{OM}^2-\overline{OP}^2}{\overline{OR}^2-\overline{OP}^2}=\frac{\overline{O'M}^2-\overline{O'Q}^2}{\overline{O'R'}^2-\overline{O'Q}^2}.$$

Ce qui prouve que $HR = H'R'$.

Donc les ordonnées des hyperboles situées sur une même parallèle à la corde commune sont égales. Alors si on décompose, comme on l'a fait précédemment, les segments en un grand nombre de trapèzes rectilignes, on démontre que ceux qui se correspondent dans les deux courbes, c'est-à-dire ceux formés par les mêmes parallèles, sont équivalents. De là on conclut que les segments APB, AQB sont équivalents.

Joignons les points A, B aux centres O, O', on forme ainsi deux triangles qui sont équivalents, puisqu'ils ont même base et pour hauteur la distance des parallèles AB et OO'. Ainsi on a :

$$\text{tri.}(AOB) - \text{seg.}(APB) = \text{tri.}(AO'B) - \text{seg.}(AQB),$$

égalité qui se réduit à

$$\text{sect.}(AOB) = \text{sect.}(AO'B).$$

Donc si, dans deux hyperboles, deux segments ou deux secteurs sont formés par deux arcs ayant une corde commune, et une tangente commune parallèle à cette corde, ces segments ou ces secteurs sont équivalents.

IVe Théorème.

276.—Si dans deux hyperboles qui ont un diamètre commun et une tangente commune à l'une des extrémités de ce diamètre, on prend deux secteurs ou deux segments déterminés par des arcs compris entre la tangente commune et une parallèle à cette ligne, ces segments ou ces secteurs sont entre eux comme les diamètres conjugués de celui qui est commun aux deux hyperboles.

En effet, soient PAP', QAQ' deux yperboles ayant le diamètre

Digitized by Google

commun OA et tangentes à la droite MAM′. Si on mène la corde CC′ parallèle à MAM′, on détermine ainsi sur chaque courbe un segment et un secteur. Il faut prouver qu'on a :

$$\text{seg.}(CAC') : \text{seg.}(DAD') :: HH' : GG',$$

et $$\text{sect.}(COC') : \text{sect.}(DOD') :: HH' : GG',$$

les lignes HH′, GG désignant les diamètres conjugués de OA dans les deux hyperboles.

Pour cela remarquons que les lignes CC′, DD′ sont dans chaque courbe des ordonnées au diamètre OA ; alors on a : Fig. 171.

$$\overline{CB}^2 = \frac{\overline{OH}^2}{\overline{OA}^2}(\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2), \qquad \overline{DB}^2 = \frac{\overline{OG}^2}{\overline{OA}^2}(\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2).$$

Donc $$\frac{BC}{BD} = \frac{OH}{OG}.$$

Maintenant si entre les points A et B on tire une série de parallèles à CC′, soient $a\alpha$, $a'\alpha'$, $a''\alpha''$, etc., ces lignes, en coupant les hyperboles, déterminent des points qui, joints deux à deux, forment les polygones $CBA\alpha\alpha'\alpha''$...., $DBA\beta\beta'\beta''$...., qu'on va démontrer être entre eux comme OH est à OG. Considérons les deux trapèzes $a\beta\beta'a'$, $a\alpha\alpha'a'$, ils ont même hauteur ; donc ils sont entre eux comme $a\beta + a'\beta'$ est à $a\alpha + a'\alpha'$. Or on a :

$$a\beta : a\alpha :: a'\beta' : a'\alpha' :: OG : OH ;$$

donc $$a\beta + a'\beta' : a\alpha + a'\alpha' :: OG : OH.$$

Ainsi, en désignant par T, T′, T″ les trapèzes contenus dans le demi-segment CAB, et par T_1, T_1', T_1'' ceux contenus dans le demi-segment DAB, on a :

$$T : T_1 :: T' : T_1' :: T'' : T_1'' \ldots :: OG : OH ;$$

de là on déduit :

$$T + T' + T'' + T''' \ldots : T_1 + T_1' + T_1'' + T_1''' \ldots :: OH : OG.$$

Digitized by Google

Donc les polygones $CBA\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''$.... et $DBA\beta\beta'\beta''\beta'''$.... sont entre eux comme OH : OG, et par conséquent leurs limites sont dans le même rapport. Donc

$$\text{tri. mixt. (CBA)} : \text{tri. mixt. (DBA)} :: OH : OG,$$

et comme on a prouvé que seg. (CAC′) = 2 tri. mixt. (CBA), seg. (DAD′) = 2 tri. mixt. (DBA), on a :

$$\text{seg. (CAC')} : \text{seg. (DAD')} :: OH : OG :: HH' : GG'.$$

Les triangles COC′, DOD′ ayant même hauteur sont entre eux comme leurs bases ; ainsi

$$\text{tri. (COC')} : \text{tri. (DOD')} :: CC' : DD' :: BC : BD.$$

Or $BC : BD :: OH : OG$; donc tri. (COC′) : tri. (DOD′) :: OH : OG.

Mais on a seg. (CAC′) : seg. (DAD′) :: OH : OG ; ainsi

$$\text{tri. (COC')} : \text{tri. (DOD')} :: \text{seg. (CAC')} : \text{seg. (DAD')}.$$

De cette proportion on tire :

$$\text{tri. (COC')} - \text{seg. (CAC')} : \text{tri. (DOD')} - \text{seg. (DAD')} :: \text{tri. (COC')} :$$

$$: \text{tri. (DOD')} :: HH' : GG',$$

ou $$\text{sect. (COC')} : \text{sect. (DOD')} :: HH' : GG'.$$

Donc si, dans deux hyperboles qui ont un diamètre commun et une tangente commune à l'une des extrémités de ce diamètre, on prend deux secteurs ou segments déterminés par des arcs compris entre la tangente commune et une parallèle à cette ligne, ces segments sont entre eux comme les diamètres conjugués de celui qui est commun aux deux hyperboles.

V° Théorème.

277. — Si des extrémités d'un arc d'hyperbole déterminant un secteur, on mène deux droites parallèles à l'une des asymptotes,

Digitized by Google

on forme avec l'autre asymptote et la courbe, un trapèze hyperbolique dont l'aire est égale à celle du secteur correspondant.

Soit ACB l'arc d'hyperbole, menons AD, BE parallèles à l'asymptote OR, il faut démontrer que le trapèze ADEB est équivalent au secteur AOB. Pour cela tirons BH, et AG parallèles à la seconde asymptote OR'. Par cette construction on forme les deux parallélogrammes OHBE, ODAG qui sont équivalents, car OG=OE, OD=OH, donc les triangles OBE, OAD qui en sont les moitiés sont équivalents, alors on a OACBE — tri. OAD = OACBE — tri. OBE, égalité qui se réduit à trap. DACBE=sect. OACB ; c'est ce qu'il fallait prouver. Fig. 172.

Donc si des extrémités d'un arc d'hyperbole on mène des parallèles à l'une des asymptotes, on forme avec la courbe et l'autre asymptote, un trapèze hyperbolique équivalent au secteur correspondant.

VIe Théorème.

278.—Deux secteurs pris dans une même hyperbole sont équivalents lorsque les axes de coordonnées étant les asymptotes, les ordonnées des extrémités du premier sont proportionnelles aux abscisses des extrémités du second.

Soient Oz, Oz' les deux asymptotes, je prends la première pour axe des y, et la seconde pour axe des x; soient PQ, MN les deux arcs de l'hyperbole QPMN, pour lesquels on a OH : OG :: OC : OB, il faut prouver que les deux secteurs POQ, MON sont équivalents. Pour cela, par les autres extrémités des arcs PQ, MN, menons des parallèles aux asymptotes, on forme ainsi les parallélogrammes OLQH, ORPQ, OBMT, OCNS qui sont équivalents et équiangles; joignons les points P et M, Q et N. Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que ces sécantes sont parallèles. Les triangles qu'on vient de former, GPF', BMF sont semblables, de même que HQE', CNE; on a en conséquence :

$$\frac{MF}{PF'}=\frac{BM}{GF'}=\frac{BF}{GP},\quad \frac{NE}{QE'}=\frac{CN}{HE'}=\frac{CE}{HQ},$$ Fig. 173.

mais on a prouvé que MF=PF', NE=OE', alors des égalités précédentes on déduit MB=GF', BF=GP, NC=HE', CE=HQ.

Des propriétés dont jouissent les parallélogrammes formés par

Digitized by Google

les coordonnées des extrémités des arcs, on tire $OB \times BM = OC \times CN$, $OG \times GP = OH \times HQ$; égalités qui fournissent les suivantes :

$$\frac{BM}{CN} = \frac{OC}{OB}, \quad \frac{GP}{HQ} = \frac{OH}{OG},$$

mais, en vertu de l'hypothèse $\frac{OB}{OC} = \frac{OG}{OH}$ et de ce que $GP = BF$, $HQ = CE$, on a $\frac{BM}{CN} = \frac{BF}{CE}$; donc les deux triangles BMF et CNE sont semblables puisqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels. Il suit de là que les secteurs correspondent à des arcs compris entre deux parallèles, donc ils sont équivalents. Donc deux secteurs dans une même hyperbole sont équivalents, quand les axes de coordonnées étant les asymptotes, les ordonnées des extrémités de l'arc déterminant le premier secteur sont proportionnelles aux abscisses des extrémités de l'arc déterminant le second.

279.—Supposons que l'arc hyperbolique PM soit tel qu'on ait OR:OB:OC::OG:OH. Les secteurs POQ, POM sont, en vertu du théorème précédent, équivalents, puisque les abscisses OR, OB sont proportionnelles aux ordonnées OG, OH, de même les secteurs POQ, MON sont équivalents, puisque OB:OC::OG:OH. Donc si on prend le secteur POQ pour unité, on aura sect. QOM=2, sect. QON = 3; dans ces inégalités on peut remplacer les secteurs QOP, QOM, QON par les trapèzes hyperboliques équivalents, en conséquence on a :

trap. LQPR = 1, trap. LQMB = 2, trap. LQNC = 3, etc.

On conclut de là que les abscisses croissant en progression géométrique, les secteurs correspondants, ou les trapèzes qui leur sont équivalents, croissent en progression arithmétique.

Donc les secteurs OQP, OQM, OQN sont les logarithmes des abscisses OR, OB, OC dans un système dont la base dépend de l'angle de asymptotes zOz'.

280.—Nous allons maintenant, à l'aide du calcul, démontrer le théorème qu'on vient d'énoncer. Soit ABCD une branche d'hyperbole dont Oz, Oz' sont les asymptotes, si on prend ces lignes pour

Digitized by Google

axes des coordonnées, et qu'on désigne leur angle par β, l'équation de l'hyperbole sera $xy = m^2$.

Considérons une suite de points A, B, C, D dont les coordonnées sont (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''); si par ces points on mène des parallèles aux axes, on forme les parallélogrammes AmBba, B$m'cb$, C$m''dc$, etc., dont les aires ont pour expressions : Fig. 174.

$$y'(x''-x')\sin\beta,\quad y''(x'''-x'')\sin\beta,\quad y'''(x^{\text{IV}}-x''')\sin\beta;$$

les points A, B, C, D appartenant à l'hyperbole, les expressions ci-dessus deviennent :

$$(x''-x')\frac{m^2\sin\beta}{x'},\quad (x'''-x'')\frac{m^2\sin\beta}{x''},\quad (x^{\text{IV}}-x''')\frac{m^2\sin\beta}{x'''},\text{ etc.}$$

Supposons que les points A, B, C, D soient tels que leurs abscisses croissent en progression géométrique dont la raison soit x', alors

$$x''=x'^2,\quad x'''=x'^3,\quad x^{\text{IV}}=x'^4,\text{ etc.}$$

Les expressions des aires des parallélogrammes AmBba, B$m'cb$, C$m''dc$, etc., deviennent :

$$(x'-1)m^2\sin\beta,\quad (x'-1)m^2\sin\beta,\quad (x'-1)m^2\sin\beta;$$

de là on conclut que les aires comprises entre les ordonnées Aa et Bb, Aa et Cc, Aa et Dd ont les valeurs suivantes :

$$(x'-1)m^2\sin\beta,\quad 2(x'-1)m^2\sin\beta,\quad 3(x^3-1)m^2\sin\beta.$$

Maintenant si on met sur une même ligne les abscisses 1, x', x'^2, x'^3, etc., et sur une autre ligne inférieure les aires correspondant à ces abscisses, c'est-à-dire comprises entre l'ordonnée du point dont $x=1$ est l'abscisse, et celle correspondant à l'abscisse considérée :

$$\begin{array}{lllll} 1 & x' & x'^2 & x'^3 & x'^4 \\ 0, & (x'-1)m^2\sin\beta, & 2(x'-1)m^2\sin\beta, & 3(x'-1)m^2\sin\beta, & 4(x'-1)m^2\sin\beta, \end{array}$$

on reconnaît que les aires forment une progression arithmétique

Digitized by Google

commençant par zéro, que les abscisses forment une progression géométrique dont le premier terme est l'unité et la raison x'; donc les aires sont les logarithmes des abscisses correspondantes.

Ce théorème qu'on vient de démontrer ne s'applique jusqu'ici qu'à l'aire de la surface polygonale $aAmBm'Cm''Dd$, mais comme on n'a nullement supposé dans la démonstration que x' avait une certaine valeur, il s'ensuit que le théorème a lieu pour des points infiniment rapprochés, et par suite pour les aires hyperboliques, puisqu'à mesure que les points A, B, C, D se rapprochent les uns des autres les points m, m', m'' se rapprochent de la courbe et à la limite, les parallélogrammes $Amba$, $Bm'cb$ sont des éléments d'aires hyperboliques.

Donc lorsqu'une hyperbole est rapportée à ses asymptotes, les aires sont les logarithmes des abscisses correspondantes.

281.—Désignons par E la base du système de logarithmes, la quantité E doit être telle qu'élevée à une puissance marquée par l'un des termes de la progression par différence, elle produise le terme correspondant de la progression par quotient; on a en conséquence $E^{n(x'-1)m^2\sin\beta}=x$, mais $x'^n=x$. Donc $x'=\sqrt[n]{x}$, alors l'équation devient $E^{n(\sqrt[n]{x}-1)m^2\sin\beta}=x$. Par cette équation, on voit que la base du système de logarithmes est dépendante de l'angle des asymptotes.

Supposons que les axes soient rectangulaires $\beta=90°$, alors $\sin\beta=1$, $m^2=1$, par conséquent l'équation qui doit servir à déterminer E, est $E^{n(\sqrt[n]{x}-1)}=x$; dans ce cas l'hyperbole est équilatère, soient Ay', Ax ses asymptotes. Prenons sur les deux hyperboles AD, A'D', les aires correspondant aux mêmes abscisses; Oa étant toujours égal à 1, l'aire $aADd=n(x'-1)m^2\sin\beta$. Ensuite l'aire $aA'D'd=n(x'-1)$, donc en désignant par S, s les deux aires en question, on aura :

$$\frac{S}{s}=\frac{n(x'-1)m^2\sin\beta}{n(x'-1)},\quad \text{d'où on tire}\quad S=sm^2\sin\beta;$$

par cette formule, on voit que connaissant l'aire hyperbolique relative à une abscisse dans une hyperbole équilatère, pour obtenir celle relative à la même abscisse dans une hyperbole donnée, il faut multiplier l'aire connue par $m^2\sin\beta$, cette quantité $m^2\sin\beta$ porte le nom de module.

Digitized by Google

On va maintenant déterminer la base du système de logarithmes donnant les aires hyperboliques lorsque la courbe est une hyperbole équilatère. Ces logarithmes, nous les désignerons par la lettre l, ainsi dans l'hyperbole équilatère, $s = l.x$; donc, dans une hyperbole quelconque dont β est l'angle des asymptotes, et m^2 la puissance, on a $S = m^2 \sin\beta l.x$. Les logarithmes qui expriment les aires d'une hyperbole équilatère sont dits *népériens*, parce que c'est Néper qui en est l'inventeur.

Pour que l'égalité $s = l.x$ donne toutes les aires, il faut que celles qui sont à gauche de $A'a$, correspondant à une abscisse moindre que l'unité dont le logarithme est négatif, soient négatives ; c'est ce qui a en effet lieu. Car soit l'arc $A'B'$, si on tire les ordonnées de ses deux extrémités, on aura :

$$MB'A'N = l.y.$$

Mais $$A'B'Pa = ONA'a + MB'A'N - B'POM ;$$

et si on remarque que l'hyperbole étant équilatère, $MB'PO$ est égal à $NA'aO$, il s'ensuit que

$$A'aPB' = MB'A'N = l.y = l.\frac{1}{x} = -l.x.$$

Donc $s = l.x$ est une formule qui s'applique à toutes les aires, soit à droite de $A'a$, ou à gauche de cette ordonnée. Dans le premier cas elles sont positives, dans le second négatives.

D'après tout ce qui vient d'être dit, il ne nous reste plus qu'à déterminer la base du système des logarithmes népériens.

L'équation $E^{n\sqrt[n]{x}-1} = x$ doit exister, quel que soit x et quel que soit n ; alors nous allons prendre la valeur de x telle que l'exposant $n(\sqrt[n]{x} - 1)$ soit l'unité pour $n = \infty$. Dans cette hypothèse $E = x$; ainsi la valeur de x, qui satisfait à l'équation $n(\sqrt[n]{x} - 1) = 1$ pour $n = \infty$, est la base du système des logarithmes népériens.

L'équation $n(\sqrt[n]{x} - 1) = 1$ donne $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; développant il vient, en ordonnant par rapport à $\frac{1}{n}$:

Digitized by Google

$$x=1+\frac{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n}{1}\cdot\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+$$
$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-4}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^4+\text{etc.}$$

Le second membre de cette égalité peut se mettre sous la forme :

$$x=2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3n}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3n}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4n}\right)+\text{etc.}$$

Maintenant supposons $n=\infty$, il vient :

$$x=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\text{etc.}$$

Telle est la valeur de x, qui rend pour $n=\infty$ l'exposant $n(\sqrt[n]{x}-1)=1$. D'après ce qu'on a dit plus haut, cette valeur, qu'on désigne ordinairement par e, est la base du système des logarithmes népériens.

Le nombre e en fraction décimale a pour expression :

$$e=2{,}718281828459045,$$

en s'arrêtant aux onze premiers termes de la série $e=2{,}7182818$.

282.—On peut du reste montrer, sans avoir recours à la recherche du nombre e en fraction décimale, qu'il est incommensurable.

La valeur du nombre e étant la série

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\text{etc.}$$

est plus grande que 3, puisque la quantité jointe au nombre 2 est essentiellement positive ; on va montrer qu'elle est moindre que 3, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+$ etc. est plus petit que l'unité.

Digitized by Google

En effet, comparons l'expression $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+$ etc. à la série $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+$ etc., dont les termes sont ceux d'une progression par quotient dont la raison est $\frac{1}{2}$. On voit que les termes de la seconde série sont plus grands que les termes de même rang dans la première ; donc la seconde série a une valeur plus grande que la première ; or cette seconde série est égale à l'unité, car la somme des termes d'une progression par quotient est

$$S=a\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-a\frac{q^n}{1-q},$$

a étant son premier terme et q la raison, expression qui montre que cette somme a pour limite $\frac{a}{1-q}$, q étant <1 ; or, dans le cas qui nous occupe, $a=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$; donc $S=1$.

Maintenant il nous reste à montrer que le nombre e ne peut être représenté par aucune fraction rationnelle. En effet, supposons $\frac{a}{b}=e$, la fraction $\frac{a}{b}$ nous pouvons toujours la considérer comme irréductible, il vient :

$$\frac{a}{b}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{2.3\ldots b}+\frac{1}{2.3\ldots b(b+1)}+$$
$$+\frac{1}{1.2.3\ldots b(b+1)(b+2)}+\text{etc.}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $2.3.4\ldots(b-1)b$. Tous les termes du second membre deviennent des nombres entiers jusqu'au terme $\frac{1}{2.3\ldots b(b+1)}$. En conséquence on a :

$$a\times 2.3.4\ldots(b-2)(b-1)=\text{un nombre entier}+\frac{1}{b+1}+$$
$$+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)}+\text{etc.}$$

Digitized by Google

La série qui suit le nombre entier dans le second membre a évidemment une somme moindre que celle de la série

$$\frac{1}{b+1}+\left(\frac{1}{b+1}\right)^2+\left(\frac{1}{b+1}\right)^3+\text{etc.}$$

Or cette dernière étant la somme des termes d'une progression géométrique décroissante, a pour valeur $\frac{1}{b}$; en conséquence de l'hypothèse $\frac{a}{b}=e$, il résulte que

$a\times 2.3\ldots(b-2)(b-1)=$ un nombre entier $+\frac{1}{B}$, B étant >1,

et $$\frac{1}{B}=\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\text{etc.}$$

égalité qui est absurde. Donc la base du système des logarithmes népériens ne peut être représentée par une fraction rationnelle.

283.—Le nombre e se trouve souvent sous la forme d'une série: alors il est très-important de connaître quelle est l'erreur que l'on commet lorsqu'on s'arrête dans cette série à un certain terme.

Du théorème de Taylor on déduit l'égalité

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+$$
$$+f^n(x)\frac{h^n}{2.3\ldots n}+f(x+\theta h)\frac{h^{n+1}}{2.3\ldots n(n+1)}.$$

Si on fait $x=0$ et qu'on remplace h par x, il vient :

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1}+f''(0)\frac{x^2}{1.2}+\ldots+f^n(0)\frac{x^n}{2.3\ldots n}+$$
$$+f(\theta x)\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}.$$

Cette série, due à Stirling, est généralement attribuée à Maclaurin, dont elle porte au reste le nom. On voit que cette série est convergente, si $f(\theta x)$ ne peut prendre que des valeurs finies,

Digitized by Google

θ variant entre 0 et l'unité, puisque le facteur $\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}$ décroît rapidement à mesure que le nombre n augmente.

Appliquons la formule de Maclaurin au développement de l'exponentielle a^x. On sait que la dérivée de l'ordre n de a^x est $l^n a a^x = \frac{d^n a^x}{dx^n}$. Alors, si on fait $x=0$, on a $f^n(0) = l^n a$. En conséquence il vient :

$$a^x = 1 + la\frac{x}{1} + l^2 a\frac{x^2}{1.2} + l^3 a\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + l^n a\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} +$$

$$+ l^{n+1} a\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)} a^{\theta x}.$$

Remplaçons a par e, alors $la = 1$, car on a $e^y = a$, d'où $y = la$. Or si on fait $a = e$, l'égalité $e^y = a$ devient $e^y = e$; par conséquent $y = 1 = le$. D'après cela, le développement de e^x est :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)} e^{\theta x}.$$

Cette série, comme la précédente, est convergente, puisque la fonction $e^{\theta x}$ ne peut avoir que des valeurs finies, θ variant entre 0 et l'unité. Supposons $x = 1$ dans cette série, on a :

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots \frac{1}{2.3\ldots n} + \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)} e^{\theta}.$$

Le reste de la série est égal à $\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)} e^{\theta}$, θ ayant une valeur comprise entre 0 et 1. Donc en s'arrêtant au terme $\frac{1}{1.2.3\ldots n}$ l'erreur que l'on commet est moindre que $\frac{e}{1.2.3\ldots n(n+1)}$ ou que $\frac{1}{1.2.4\ldots n(n+1)}$, puisque e est plus petit que 3.

Ainsi donc, en résumé, si on prend $e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} \ldots$

Digitized by Google

$+\frac{1}{2.3...(n-1)n}$, l'erreur que l'on commet en s'arrêtant au dernier terme est moindre que $\frac{1}{2.4.5.(n-1)n(n+1)}$.

Hyperboles semblables.

284.—Lorsque deux hyperboles semblables ont leur centre au même point, et leurs sommets sur la même ligne, on appelle arcs semblables ceux dont les cordes sont homologues.

THÉORÈME.

285.—Deux arcs semblables pris sur deux hyperboles semblables sont proportionnels à leurs cordes, ou aux axes des hyperboles.

Fig. 175. En effet, soient MN, M'N' deux arcs semblables pris sur les hyperboles semblables dont AA', CC' et BB', DD' sont les axes. Les arcs MN, M'N' étant par hypothèse semblables, on a :

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{OA}{OB},$$

et les points M, M', et N, N' sont sur les deux diamètres OM', ON'; dans l'angle M'ON' tirons une série de diamètres, soient m, n, p, q, etc., m', n', p', q', etc. les points homologues situés sur les arcs MPN, M'P'N' où ces lignes coupent les deux courbes; en joignant ces points deux à deux on forme deux polygones inscrits dans les segments MPN, M'P'N'; les côtés de ces polygones sont des sécantes homologues dans les deux hyperboles, donc en vertu d'un théorème démontré sur ces courbes, on a la suite de rapports égaux $Mm : M'm' :: mn : m'n' :: np : n'p' :: pq : p'q'$, d'où on tire $Mm + mn + pq + \ldots : M'm' + m'n' + n'p' + \ldots :: Mm : M'm' :: OA : OB$. En désignant par P, P' les deux polygones inscrits dans les segments MPN, M'P'N', on a périm. (P) : périm. (P') :: OA : OB; cette proportion existe quel que soit le nombre des côtés, et comme plus ce nombre croîtra, plus les périmètres convergeront vers les arcs MPN, M'P'N', il s'ensuit qu'on a MPN : M'P'N' :: OA : OB :: MN : M'N'. Donc deux arcs semblables dans des hyperboles semblables, sont entre eux comme leurs cordes ou comme les axes.

Digitized by Google

Deux segments, ou deux secteurs, correspondant à des arcs semblables sont eux-mêmes semblables.

286.—Deux segments semblables sont entre eux comme les carrés de leurs cordes, ou comme les carrés de deux diamètres homologues.

En effet, par les points de division m, n, p, q et m', n', p', q', menons des parallèles au diamètre OA, on décompose ainsi les deux segments en trapèzes; considérons deux de ces quadrilatères homologues, soient $mnba$, $m'n'b'a'$, on va montrer qu'ils sont semblables; d'abord leurs angles homologues sont égaux, puisque ces angles ont des côtés parallèles, les lignes mn, $m'n'$ étant parallèles comme deux sécantes homologues dans des hyperboles semblables, il reste à prouver que leurs côtés sont proportionnels.

On a $mn : m'n' :: On : On'$; joignons b' au centre O, cette ligne coupe MN en un point b_1 que je suppose différent de b; à cause des triangles Ob_1N, $Ob'N'$, on a :

$$\frac{Ob_1}{Ob'} = \frac{ON}{ON'} = \frac{On}{On'};$$

donc les lignes $n'b'$, nb_1 sont parallèles; donc b_1 n'est autre chose que le point b; alors des triangles semblables on tire :

$$\frac{nb}{n'b'} = \frac{mn}{m'n'} = \frac{On}{On'};$$

on démontrerait de même que

$$\frac{ma}{m'a'} = \frac{On}{On'}. \quad \text{Donc} \quad \frac{nb}{n'b'} = \frac{mn}{m'n'} = \frac{ma}{m'a'} = \frac{ab}{a'b'}.$$

Ainsi les trapèzes homologues sont semblables, donc les polygones $Mmnpq$.....N, $M'm'n'p'$.....N' sont semblables, en conséquence on a :

$$\text{polyg. (P)} : \text{polyg. (P')} :: \overline{Mn}^2 : \overline{M'n'}^2 :: \overline{OA}^2 : \overline{OB}^2,$$

quel que soit le nombre de leurs côtés; donc enfin :

$$\text{seg. MPN} : \text{seg. M'P'N'} :: \overline{OA}^2 : \overline{OB}^2 :: \overline{MN}^2 : \overline{M'N'}^2.$$

Digitized by Google

Deux secteurs semblables sont entre eux comme les carrés de leurs cordes, ou comme les carrés de deux diamètres homologues.

En effet, les deux polygones MON...$qpnm$, M'O'N'...$q'p'n'm'$ sont semblables, car leurs angles homologues sont égaux, puisque leurs côtés sont parallèles, comme sécantes homologues d'hyperboles semblables; ensuite leurs côtés homologues sont proportionnels, car on a $Mm : M'm' :: m'n : m'n'$, etc.... $:: Om : Om' :: ON : ON'$ pour le même motif que précédemment. Donc si P_1, P'_1 désignent ces polygones, on a :

$$\text{polyg. } (P_1) : \text{polyg. } (P'_1) :: \overline{OA}^2 : \overline{OB}^2 :: \overline{MN}^2 : \overline{M'N'}^2;$$

par suite :

$$\text{sect. MON} : \text{sect. M'ON'} :: \overline{AO}^2 : \overline{OB}^2 :: \overline{MN}^2 : \overline{M'N'}^2.$$

Donc deux secteurs ou deux segments semblables sont entre eux comme les carrés de leurs cordes, ou comme les carrés de deux diamètres homologues.

La démonstration qu'on vient d'appliquer aux secteurs semblables, et qui du reste est fort simple, peut s'appliquer également aux segments semblables, mais l'autre démonstration met en évidence une propriété des arcs semblables qu'il est inutile d'énoncer.

Nous ne nous occuperons point de la rectification de l'hyperbole par la méthode générale, parce que l'intégrale à laquelle elle conduit ne permet pas, comme dans l'ellipse, d'obtenir, même par approximation, la longueur d'un arc compris entre deux points déterminés.

Parabole.

287.—On appelle *segment* dans une parabole, l'espace compris entre un arc de cette courbe et sa corde.

Tout triangle qui a son sommet sur la courbe et pour base la corde d'un segment est dit *inscrit* dans ce cas.

Si par le milieu d'un arc de parabole, MSN, on mène une tangente PQ, et que par ses deux extrémités on tire des diamètres, en les prolongeant jusqu'à la rencontre de la tangente, on forme ainsi un parallélogramme MPQN qu'on dit être *circonscrit* au segment MSN.

Digitized by Google

Ier Théorème.

288.—Si par le milieu de la corde d'un segment on mène un diamètre, on divise ainsi le segment en deux parties équivalentes.

Soit MNS le segment, dont I est le milieu de la corde, par ce point menons le diamètre IR qui coupe la courbe au point S. Il faut démontrer que les deux triangles mixtilignes ISN, ISM sont équivalents. Pour cela prenons les points a, b, c, etc., entre S et I sur SR, et par ces points menons les cordes $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, etc., parallèles à MN. Joignons deux à deux les points où elles coupent la parabole, on forme de cette manière deux polygones $IS\alpha\beta\gamma....M$, $IS\alpha'\beta'\gamma'.....N$ qui sont équivalents, car ils se composent d'un même nombre de trapèzes équivalents deux à deux, comme ayant des bases égales et même hauteur. Concevons qu'entre S et I on prenne plus de points de division, les polygones qui en résulteront auront un nombre de côtés plus grand, et par conséquent iront en convergeant vers les triangles mixtilignes ISN, ISM; et d'un autre côté comme ils sont toujours équivalents, il s'ensuit que leurs limites, les triangles mixtilignes ISM, ISN, sont aussi équivalentes. Donc, si par le milieu de la corde d'un segment on mène un diamètre, on divise ce segment en deux parties équivalentes. Fig. 176.

Si ce segment était tel que sa corde fût perpendiculaire à l'axe, alors le diamètre qui devient l'axe de la parabole le divise en deux parties égales.

Du théorème qu'on vient de démontrer, il résulte, que si dans la parabole on mène deux cordes parallèles, et leur diamètre, l'espace compris entre la courbe et les parallèles est divisé par le diamètre dont il s'agit en deux parties équivalentes, ainsi les deux trapèzes mixtilignes I'INN', II'MM' sont équivalents, II' étant le diamètre qui divise les cordes parallèles MN, M'N' en deux parties égales.

Supposons qu'on détermine les milieux des ordonnées $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, etc., soient m, m', m'', etc., ces points forment une parabole, car les ordonnées am, bm', cm'', etc., sont proportionnelles aux abscisses correspondantes Sa, Sb, Sc, etc.; soit M'' le point où cette courbe vient aboutir sur la corde MN, le nouveau triangle mixtiligne ISM'' est moitié du triangle mixtiligne ISM, car joignons deux à deux les points S, m, m', m'', etc., on forme un polygone inscrit IS$mm'm''$.....M'' qui est la moitié du polygone $IS\alpha\beta\gamma.....M$,

Digitized by Google

car ils se composent d'un même nombre de trapèzes qui deux à deux ont même hauteur, mais dont la somme des bases de ceux du polygone IS$mm'm''$.....M'' est moitié de celle des trapèzes correspondants du polygone IS$\alpha\beta\gamma$.....M. Donc, puisque quel que soit le nombre des côtés de ces polygones la relation indiquée plus haut existe, elle existera entre leurs limites, c'est-à-dire que tri. mixt. ISM = 2 tri. mixt. ISM''. Si on désigne par N'' le second point où cette seconde parabole coupe la corde MN, on aura seg. MSN = 2 seg. M''SN''.

En général, si on eût pris $IM'' = \frac{1}{n} IM$, $am = \frac{1}{n} a\alpha$, etc., la parabole formée par tous ces points jouirait de la propriété que le segment M''SN'' serait la $n^{\text{ième}}$ partie du segment parabolique MSN.

289.—Par le point N tirons la corde NB, qui coupe la tangente au point S en C, joignons les points N, B à S, et tirons SE parallèle à NC. Le triangle BSN est moitié du parallélogramme BDEN, puisque ces deux figures ont même base NB et même hauteur, la distance des parallèles NB et DE, par le point O milieu de FI tirons la parallèle OK à la corde MN; les deux trapèzes BFIN, DFIE ayant même hauteur, sont entre eux comme OK et OH.

Fig. 177.

Au-dessous du diamètre SR construisons la parabole dont les ordonnées relatives au diamètre SR soient moitié des ordonnées correspondantes de la parabole MSN, soit S$mm'm''$M''; joignons les points S, m, m', m'', M'' deux à deux. Cela fait, supposons qu'on fasse tourner la sécante NB autour du point N jusqu'à ce qu'elle devienne tangente à la courbe, alors NB sera un élément de la parabole, OK sera une ordonnée au diamètre SK, et $KH = \frac{1}{2} OK = SC$, en vertu de cette propriété de la parabole, que la sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact. Dans cette hypothèse le parallélogramme BDEN est la moitié du trapèze BFIN, et par conséquent équivalent au trapèze FIM''m''; donc le triangle BSN est équivalent à la moitié du trapèze Fm''M''I. Maintenant concevons que l'arc SBN soit divisé en un nombre très-considérable de parties, et qu'on joigne chaque point de division au point S, puis ensuite que par ces points on mène des parallèles à la corde MN, chaque triangle élémentaire du segment NBS sera équivalent à la moitié du trapèze élémentaire correspondant dans le triangle mixtiligne IS$mm'm''$M''. Donc le segment NBS est la

Digitized by Google

moitié du demi-segment IS$m'm''$M ; or on a démontré que

$$\text{tri. mixti. IS}mm'm''\text{M}'' = \frac{1}{2}\text{tri. mixti. ISM};$$

donc $$\text{seg. NBS} = \frac{1}{4}\text{tri. mixt. ISM}.$$

Désignons par S le triangle mixtiligne ISN, par P le parallélogramme ISQN, on aura, d'après ce qu'on vient de démontrer :

$$\text{S} = \text{ISN} + \text{seg. SBN} = \frac{1}{2}\text{P} + \frac{1}{4}\text{S}. \text{ Simplifiant on a } \text{S} = \frac{2}{3}\text{P}.$$

Ainsi le demi-segment ISBN est équivalent aux $\frac{2}{3}$ du parallélogramme ISQN ; donc le segment MSN est équivalent aux $\frac{2}{3}$ du parallélogramme circonscrit correspondant.

Il suit de là que deux segments paraboliques quelconques sont entre eux comme les parallélogrammes circonscrits à ces segments.

290.—Considérons le triangle NSM inscrit au segment dont la corde est MN, il est la moitié du parallélogramme circonscrit au segment. Donc tout triangle inscrit dans un segment dont le sommet est sur le diamètre, divisant la corde du segment en deux parties égales, est les $\frac{3}{4}$ du segment. Il est d'ailleurs évident que ce triangle est le maximum de tous ceux qu'on peut inscrire dans le segment.

Du théorème qu'on vient de démontrer, il résulte que si on prend pour axes de coordonnés une tangente et le diamètre à son point de contact, l'aire parabolique comprise entre le diamètre, la courbe et une ordonnée quelconque, a pour expression $\frac{2}{3}xy\sin\alpha$, α étant l'angle des coordonnées ; si $\alpha = 90$, le diamètre est l'axe de la courbe. Dans ce cas, l'aire parabolique est $\frac{2}{3}xy$, c'est-à-dire qu'elle est égale aux deux tiers de l'aire du rectangle construit sur les coordonnées de l'extrémité de l'arc formant le triangle mixtiligne.

La méthode qu'on vient de suivre pour obtenir l'expression d'un

Digitized by Google

segment parabolique est pénible, en ce qu'elle est longue ; on va maintenant en exposer une seconde plus simple.

Fig 178. 291.—Soit le demi-segment parabolique APM, inscrivons dans cette surface le polygone AMPP'P'', puis par les sommets menons les tangentes TP, T'P', T''P'', et les ordonnées au diamètre AM ; le polygone AMPP'P'' se trouve ainsi décomposé en trapèzes que nous allons comparer avec les triangles que forment les tangentes entre elles. Considérons le trapèze MPP'B' et le triangle TPT'. Par le point I, milieu de la corde PP', menons un diamètre ; il passera, prolongé, au point de concours des tangentes TP, T'P', en vertu de ce théorème, que la sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact. Maintenant des points H et I abaissons les perpendiculaires HD, IE sur le diamètre AM, on a :

$$\text{triangle THT}' = \frac{1}{2}\text{TT}' \times \text{HD},$$

$$\text{trapèze B}'\text{P}'\text{PM} = \text{B}'\text{M} \times \text{HD}.$$

Or $AM = AT$, $AB' = AT'$; donc $AT - AT' = AM - AB'$ ou $TT' = B'M$. Donc le trapèze B'P'PM est double du triangle THT' ; de même le trapèze BP''P'B' est double du triangle T'H'T'', et ainsi de suite. Cette relation existe quel que soit le nombre des côtés du polygone ; donc si on les suppose suffisamment rapprochés pour que les côtés du polygone soient les éléments de l'arc parabolique AP''P'P, le polygone inscrit se confondra alors avec le demi-segment AMP, et les tangentes formeront une série de triangles dont la somme sera l'aire extérieure AP''PT. En conséquence, la somme des éléments du demi-segment AMP, ou ce demi-segment lui-même sera double de la somme des triangles formés par les tangentes, ou les éléments de l'arc AP''P prolongés jusqu'au diamètre AM, somme qui constitue la surface extérieure AP''PT. Alors si on pose :

$$S = \frac{1}{2}\text{seg. AP}''\text{PM}, \quad S' = \text{surf. TPP}''\text{A}, \quad T = \text{tri. TPM},$$

on a, d'après ce qu'on vient de prouver :

$$T = S + S' = S + \frac{1}{2}S = \frac{3}{2}S, \quad \text{d'où} \quad S = \frac{2}{3}T.$$

Digitized by Google

Par le point P tirons PG parallèle à AM, le point G étant situé sur la tangente AS à la courbe, on a :

$$\text{triangle TPM} = \text{parallélogramme AGPM}.$$

Donc l'aire parabolique comprise entre un diamètre, une ordonnée à ce diamètre, et l'arc compris entre l'origine de ce diamètre et l'ordonnée, est les $\frac{2}{3}$ du parallélogramme formé sur les coordonnées du point extrême de l'arc.

Nous allons maintenant nous servir du calcul pour démontrer cette propriété des aires paraboliques.

292.—Soit AN'NB un demi-segment parabolique, prenons sur l'arc les points N', N'', N''', etc., joignons-les deux à deux ; on inscrit ainsi au demi-segment le polygone ABNN'N''. Par ses sommets menons des parallèles aux lignes AM, AH, dont l'une est un diamètre, et l'autre une tangente à son extrémité. Par cette construction on forme intérieurement au segment parabolique les parallélogrammes BQN'B', B'Q'N''B'', B''Q''N'''B''', etc., que nous désignerons par P, P', P'', P''', etc. ; en outre on détermine les parallélogrammes PN'XX', X'RN''X'', X''R'N'''X''', que nous désignerons par p, p', p'', p''', qui sont extérieurs au segment ABNN'. Fig. 179.

Appelons α l'angle des axes de coordonnées, et (x, y), (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les coordonnées des points N, N', N'', N''', on a :

$$P=(x-x')y'\sin\alpha,\quad P'=(x'-x'')y''\sin\alpha,\quad P''=(x''-x''')y'''\sin\alpha,\ \text{etc.}$$

$$p=x'\sin\alpha(y-y'),\quad p'=x''(y'-y'')\sin\alpha,\quad p''=x'''(y''-y''')\sin\alpha.$$

En conséquence $\frac{P}{p}=\frac{y'}{x'}\frac{(x-x')}{y-y'}$. Mais les points N, N' étant sur la courbe, on a : $y^2=2px$.

Ainsi $y'^2=2px'$, $y''^2=2px''$, alors $y-y'=\frac{2(x-x')p}{y+y'}$, $x'=\frac{y'^2}{2p}$, substituant ces valeurs dans celle de $\frac{P}{p}$, il vient :

$$\frac{P}{p}=\frac{y+y'}{y'}.$$

On trouverait de même :

$$\frac{P'}{p'}=\frac{y'+y''}{y''},\qquad \frac{P''}{p''}=\frac{y''+y'''}{y'''},\ \text{etc.}$$

Digitized by Google

Les points N, N′, N″, N‴ sont pris arbitrairement ; supposons-les espacés de manière qu'on ait :

$$y - y' = \alpha y',\ y' - y'' = \alpha y'',\ y'' - y''' = \alpha y''', \text{ etc. ;}$$

cette hypothèse donne :

$$y' = \frac{y}{1+\alpha},\quad y'' = \frac{y}{(1+\alpha)^2},\quad y''' = \frac{y}{(1+\alpha)^3}, \text{ etc.,}$$

$$x' = \frac{y^2}{2p(1+\alpha)^2},\quad x'' = \frac{y^2}{2p(1+\alpha)^4},\quad x''' = \frac{y^2}{2p(1+\alpha)^6}.$$

On voit que les ordonnées des points N, N′, N″, N‴ forment une progression géométrique décroissante dont le premier terme est y, et la raison $\frac{1}{1+\alpha}$; en même temps que les abscisses des mêmes points forment une progression géométrique décroissante dont le premier terme est $\frac{y^2}{2p}$ et la raison $\frac{1}{(1+\alpha)^2}$. De l'égalité

$$y - y' = \alpha y' \qquad \text{on tire} \qquad y + y' = 2y' + \alpha y'.$$

En conséquence on a :

$$\frac{P}{p} = \frac{2y' + \alpha y'}{y'} = 2 + \alpha,\quad \frac{P'}{p'} = 2 + \alpha,\quad \frac{P''}{p''} = 2 + \alpha,\quad \frac{P'''}{p'''} = 2 + \alpha,$$

égalités qui donnent la suite de rapports égaux :

$$P : p :: P' : p' :: P'' : p'' :: P''' : p''' :: \text{etc.}$$

De là on tire : $\dfrac{P + P' + P'' + P''' + \text{etc.}}{p + p' + p'' + p''' + \text{etc.}} = 2 + \alpha.$

Cette dernière égalité existe quelle que soit la valeur donnée à α ; alors si nous donnons à α des valeurs de plus en plus petites, par les expressions des abscisses x', x'', x''' on voit que les points de division se rapprochent les uns des autres, et de là il suit que la somme des parallélogrammes intérieurs $P + P' + P'' + P'''$, etc. va

Digitized by Google

en se rapprochant du demi-segment ANB, et en outre que la somme $p+p'+p''+p'''+$ etc. se rapproche du triangle curviligne AN'NX.

Donc, puisque entre ces variables il y a toujours l'égalité

$$\frac{P+P'+P''+P'''+\text{etc.}}{p+p'+p''+p'''+\text{etc.}}=2+\alpha,$$

leurs limites jouiront de la même relation ; or

$$\lim.\ (P+P'+P''+\text{etc.})=\frac{1}{2}\ \text{seg. ABNN}'=S,$$

$$\lim.\ (p+p'+p''+p'''+\text{etc.})=\text{tri. mixt. AN}'\text{NX}=s,$$

et $$\lim.\ (2+\alpha)=2.$$

Ainsi on a : $$\frac{S}{s}=2 \quad \text{ou} \quad \frac{S+s}{s}=3;$$

divisant ces deux égalités membre à membre, il vient :

$$\frac{S+s}{S}=\frac{3}{2}.$$

Mais $S+s=$ parallélogramme ABNX, donc l'aire parabolique comprise entre un diamètre, un arc, et l'ordonnée de son extrémité par rapport au diamètre, est équivalent aux $\frac{2}{3}$ du parallélogramme construit sur les coordonnées du point extrême de l'arc.

Les courbes, qui sont telles qu'on peut assigner algébriquement la valeur d'une portion quelconque de leur aire se nomment quarrables ; la parabole est la seule courbe du second degré jouissant de cette propriété, puisque l'aire d'une portion quelconque d'ellipse s'exprime en fonction de l'aire d'une circonférence, en outre que l'aire d'une portion quelconque d'hyperbole a pour valeur une fonction transcendante.

293.—Il ne nous reste pour terminer complétement ce qui est relatif à la quadrature de la parabole, qu'à exposer la méthode donnée par le calcul intégral.

L'équation d'une parabole rapportée à un diamètre, et à la tan-

Digitized by Google

gente à son extrémité est $y^2=2px$, soit α l'angle des coordonnées.

L'élément d'une surface plane a pour expression $y \sin \alpha\, dx = dA$; en conséquence, la valeur d'une aire parabolique comprise entre l'axe des y et l'ordonnée y est

$$A=\int_0^x \sin\alpha \sqrt{2p}\, x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sin\alpha \sqrt{2p}\, x^{\frac{3}{2}} + c\,;$$

la constante est ici nulle, puisque pour $x=0$, $A=0$ on a :

$$\frac{2}{3} \sqrt{2p} \sin\alpha x^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Ainsi
$$A = \frac{2}{3} \sin\alpha \sqrt{2p}\, x^{\frac{3}{2}},$$

égalité qu'on peut mettre sous la forme $\frac{2}{3} \sin\alpha \sqrt{2px}\, x = A$ ou, en substituant à $\sqrt{2px}$ sa valeur y, $A = \frac{2}{3} y \sin\alpha x$, expression obtenue précédemment.

Supposons qu'on veuille l'expression de l'aire comprise entre deux sécantes parallèles, et les arcs paraboliques interceptés; soient (x_0, y_0), (x_1, y_1) les coordonnées des extrémités de ces sécantes, si on désigne par A_1 l'aire demandée, on aura :

$$A_1 = 2\int_{x_0}^{x_1} \sin\alpha \sqrt{2p}\, x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{3} \sin\alpha \sqrt{2p}\, (x_1^{\frac{3}{2}} - x_0^{\frac{3}{2}}) =$$

$$= \frac{4}{3} \sin\alpha\, (y_1 x_1 - y_0 x_0).$$

Paraboles semblables.

294.—Dans deux paraboles, on appelle segments semblables, ceux correspondant à deux sécantes homologues.

Digitized by Google

Ier Théorème.

Les arcs servant de base à deux segments semblables sont entre eux comme les cordes de ces segments.

Soient deux paraboles AMS, AM'S' ayant leur sommet au point A, et même axe Ax. Considérons deux cordes homologues MN, M'N', c'est-à-dire dont les extrémités correspondantes sont situées sur une même ligne droite partant de l'origine ; les segments MSN, M'S'N' ayant pour cordes MN, M'N' sont semblables. Il faut prouver que $\frac{\text{arc (MN)}}{\text{arc (M'N')}} = \frac{\text{MN}}{\text{M'N'}}$. Pour cela dans l'angle MAN tirons une série de sécantes, ces lignes coupent l'arc MN en a, b, c, d... etc., et l'arc M'N' en a', b', c', d'. Joignons ces points deux à deux sur chaque arc. On inscrit deux polygones dans les segments, qui sont semblables, car les côtés qni les forment étant des sécantes homologues sont parallèles et proportionnels, donc ces deux polygones ont des angles égaux et les côtés proportionnels, donc ils sont semblables ; alors les portions homologues de leur périmètre sont dans le rapport des côtés. Désignons par périm. (P) le périmètre du polygone M$abcd$N moins le côté MN, et par périm. (P') le périmètre homologue dans le polygone M'$a'b'c'd'$N'. On a : Fig. 180.

$$\frac{\text{périm. (P)}}{\text{périm. (P')}} = \frac{\text{MN}}{\text{M'N'}};$$

supposons qu'on fasse croître le nombre des côtés, la relation qu'on vient d'indiquer existera toujours, mais comme à mesure que le nombre des côtés augmente, périm. (P) s'approche de l'arc M$abcd$N, ainsi que périm. (P') de l'arc M'$a'b'c'd'$N', on en conclut :

$$\frac{\text{arc (MN)}}{\text{arc (M'N')}} = \frac{\text{MN}}{\text{M'N'}}.$$

Donc deux arcs correspondants à deux segments semblables sont entre eux comme leurs cordes.

Les parallélogrammes circonscrits à deux segments semblables, sont eux-mêmes semblables.

Soient PQR, P'Q'R' deux segments semblables, il faut prouver

Digitized by Google

que les parallélogrammes PprR, P'$p'r'$R' qui leur sont circonscrits, sont semblables.

En effet, remarquons que les points de contact Q, Q' des tangentes pr, $p'r'$ sont sur une même droite passant au point A; les milieux I, I' des cordes PR, P'R' sont dans le même cas, car les triangles PAR, P'AR' étant semblables, on sait que si on joint le milieu de la base de l'un au sommet A, le milieu de la base de l'autre est sur la ligne qu'on détermine ainsi. Les triangles Q'AI', QAI sont donc semblables, alors on a :

$$\frac{QI}{Q'I'} = \frac{Pp}{P'p'} = \frac{AQ}{AQ'} = \frac{PR}{P'R'}.$$

Ainsi les côtés des parallélogrammes sont proportionnels, ensuite leurs côtés homologues sont parallèles, donc ils sont semblables.

Donc les parallélogrammes circonscrits à deux segments semblables, sont eux-mêmes semblables.

295.—Les aires de deux segments sont entre elles comme celles des parallélogrammes circonscrits correspondants; donc les aires de deux segments semblables sont entre elles comme les carrés des cordes qui les limitent ou comme les carrés de deux droites homologues quelconques qu'on peut mener dans ces segments.

De cette propriété des segments semblables, il s'ensuit qu'à l'aide du triangle rectangle on peut facilement construire :

1° Un segment parabolique semblable à deux ou plusieurs segments paraboliques semblables entre eux, et équivalent à leur somme.

2° Un segment parabolique semblable à deux segments paraboliques semblables entre eux, et équivalent à leur différence.

3° Un segment parabolique semblable à un segment parabolique donné, et qui soit à celui-là dans tel rapport qu'on voudra.

Rectification de la parabole.

296.—La différentielle d'un arc de courbe a pour expression $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, alors si on applique cette formule à la parabole rapportée à son sommet à son axe, il vient, $x^2 = 2py$ étant son équation :

Digitized by Google

$$ds = dx\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = dx\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} = dx\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

par conséquent

$$S = \int_0^x \left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{p}\int_0^x (p^2+x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Ainsi nous sommes ramenés à intégrer $\int (p^2+x^2)^{\frac{1}{2}} dx$. Pour cela, remarquons que cette intégrale peut se mettre sous la forme :

$$\int (p^2+x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \int \frac{p^2 dx}{(p^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} + \int \frac{x^2 dx}{(p^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour intégrer $\int \frac{p^2 dx}{(p^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$, posons $\sqrt{x^2+p^2} = \alpha - x$, alors $p^2 = \alpha^2 - 2\alpha x$, d'où, en différentiant, on tire $dx = d\alpha \frac{\alpha - x}{\alpha}$. Substituant à $\sqrt{x^2+p^2}$, et à dx leurs valeurs en fonction de α dans la dernière intégrale, on a :

$$\int \frac{p^2 dx}{(p^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{p^2(\alpha - x)\, d\alpha}{\alpha(\alpha - x} = +p^2 \int \frac{d\alpha}{\alpha} = +p^2\, l.\, \alpha,$$

et remplaçant α par sa valeur, il vient :

$$\int \frac{p^2 dx}{(x^2+p^2)^{\frac{1}{2}}} = +p^2\, l.\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right).$$

Cherchons la valeur de $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+p^2)^{\frac{1}{2}}}$, cette expression revient à $\int \frac{x.x dx}{(x^2+p^2)^{\frac{1}{2}}}$, alors en intégrant par partie, il vient :

Digitized by Google

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+p^2)^{\frac{1}{2}}} = x\sqrt{x^2+p^2} - \int dx\,(x^2+p^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin substituant aux deux intégrales partielles les valeurs qu'on vient de leur trouver, on a :

$$\int (x^2+p^2)^{\frac{1}{2}} dx = +p^2\, l.\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right)+$$
$$+x\sqrt{x^2+p^2} - \int dx\,(x^2+p^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Résolvant cette équation par rapport à l'intégrale cherchée, il vient :

$$\int (x^2+p^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\, x\sqrt{x^2+p^2} + \frac{1}{2}\, p^2\, l.\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right)+c.$$

En conséquence l'expression de l'arc s est

$$s = \int_0^x \left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2p}\, x\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p}{2}\, l.\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right)+c.$$

Pour déterminer la constante c, faisons $x=0$, alors $s=0$, puisqu'on commence à compter les arcs à partir de l'origine des coordonnées, l'équation devient :

$$0 = \frac{1}{2} l.\sqrt{p} + c, \quad \text{d'où} \quad c = -\frac{p}{2} l.p.$$

Transportant cette valeur dans celle de l'arc s, il vient :

$$s = \frac{1}{2} x\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} + \frac{p}{2} l.\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right) - \frac{1}{2} l.p = \frac{1}{2} x\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} +$$
$$+\frac{p}{2} l.\left(\frac{x}{p}+\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\right).$$

Telle est l'expression générale d'un arc de la parabole commençant

Digitized by Google

à l'origine des axes de coordonnées ; celle d'un arc s' dont les coordonnées des extrémités sont (x_0, y_0), (x_1, y_1) est

$$s' = \frac{1}{2}\left(x_1\sqrt{1+\frac{x_1^2}{p^2}} - x_0\sqrt{1+\frac{x_0^2}{p^2}}\right) +$$

$$+\frac{p}{2}l.\left(\frac{\frac{1}{p}x_1+\sqrt{1+\frac{x_1^2}{p^2}}}{\frac{1}{p}x_0+\sqrt{1+\frac{x_0^2}{p^2}}}\right).$$

Ainsi tout ce qui est relatif à la rectification de la parabole serait exposé, si cette courbe n'était pas employée dans certaines circonstances qui exigent que l'expression de l'arc parabolique soit mise sous une autre forme qui rende la formule plus applicable dans la pratique. On démontre, en mécanique, que si à une chaîne ou à un câble, fixé par ses deux extrémités à deux piliers d'égale hauteur, on suspend des poids distribués proportionnellement à la longueur de la projection horizontale de la chaîne, la forme que prend alors cette chaîne est une parabole.

297.—L'hypothèse qu'on vient de faire a lieu dans les ponts suspendus, pour l'établissement desquels on a besoin de la longueur du câble suspenseur. Dans ces sortes de questions, on se donne l'ouverture du pont et sa flèche, il faut trouver la longueur du câble suspenseur. Si nous désignons par $2h$ l'ouverture et par f la flèche, l'équation de la parabole sera de la forme $x^2 = 2py$. Pour avoir la valeur de p, à la place de x, y mettons leurs valeurs pour les points extrêmes de la courbe, dans le cas qui nous occupe, $h^2 = 2pf$, d'où $p = \frac{h^2}{2f}$. Substituant dans l'expression de l'arc s à p sa valeur $\frac{h^2}{2f}$, il vient :

$$s = \frac{1}{2}x\sqrt{1+\left(\frac{fx}{h^2}\right)^2} + \frac{h^2}{4f}l.\left[\frac{2fx}{h}+\sqrt{1+\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^2}\right].$$

Telle est la formule d'où l'on part pour déterminer la longueur d'un arc de parabole dans un pont suspendu.

Digitized by Google

Nous allons mettre cette expression sous une autre forme pour la rendre d'un emploi plus facile.

Développons le second membre de l'égalité en série :

$$s = x + \frac{h^2}{2f}\left[\frac{1}{2.3}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^3 - \frac{1}{5.8}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^5 + \frac{1}{7.16}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^7 + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{9.128}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^9 + \text{etc.}\right] \qquad \text{(M)}$$

On voit que dans cette série les exposants sont la suite naturelle des nombres impairs, et que les signes sont alternativement positifs et négatifs.

Supposons $x = h$, alors la valeur de s sera celle du demi-câble du pont suspendu ; désignons cette longueur par A, il vient :

$$\text{A} = h\left[1 + \frac{1}{3.2}\left(\frac{2f}{h}\right)^2 - \frac{1}{5.8}\left(\frac{2f}{h}\right)^4 + \frac{1}{7.16}\left(\frac{2f}{h}\right)^6 - \right.$$

$$\left. - \frac{5}{9.128}\left(\frac{2f}{h}\right)^8 + \text{etc.}\right] \qquad \text{(N)}$$

Ainsi, connaissant la flèche et l'ouverture du pont, on peut calculer la longueur du câble ; mais on a souvent besoin, la longueur de ce câble étant connue, de déterminer la flèche : c'est la question inverse de la première qu'il s'agit de résoudre. Pour cela nous allons employer les procédés servant au retour des suites. (*Voir* la note n° 1.)

Posons $\qquad u = av^2 + bv^4 + cv^6 + dv^8 + \text{etc.}$;

on en déduit :

$$v^2 = \frac{1}{a}\left(u - \frac{b^2}{a^2}u^2 - \frac{ac - 2b^2}{a^4}u^3 - \frac{a^2d + 5abc + 5b^3}{a^6}u^4 - \text{etc.}\right),$$

équation qui, comparée à l'équation (N), donne :

$$u = \frac{\text{A} - h}{h}, \quad v = \frac{2f}{h}, \quad a = \frac{1}{6}, \quad b = \frac{-1}{40}, \quad c = \frac{1}{112}, \quad d = -\frac{5}{1152}.$$

En conséquence la formule demandée est

Digitized by Google

$$\left(\frac{2f}{h}\right)^2 = 6\left[\frac{A-h}{h} + \frac{9}{10}\left(\frac{A-h}{h}\right)^2 - \frac{54}{175}\left(\frac{A-h}{h}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{207}{350}\left(\frac{A-h}{h}\right)^4 - \text{etc.}\right].$$

298. Reprenons la formule

$$s = \frac{1}{2}x\sqrt{1+\left(\frac{2fx}{h}\right)^2} + \frac{h^2}{4f}l.\left[\frac{2fx}{h} + \sqrt{1+\left(\frac{2fx}{h}\right)^2}\right].$$

Pour la rendre plus simple, il faut remarquer que le rapport $\frac{f}{h}$ est généralement assez petit pour qu'on puisse négliger les puissances supérieures à la seconde; ordinairement $\frac{f}{h}$ varie entre $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{25}$; alors en développant en série, on est amené à ne prendre que les deux premiers termes de la série (M); en conséquence

$$s = x + \frac{h^2}{2f}.\frac{1}{2.3}\left(\frac{2fx}{h}\right)^3,$$

et enfin la demi-longueur du câble suspenseur est égale à

$$h\left(1 + \frac{2}{3}\frac{f^2}{h^2}\right) = A.$$

Telle est la formule simple dont on se sert dans la pratique.

299.—La méthode que nous avons suivie pour intégrer l'expresssion $\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx$ est fort longue; on va en exposer une autre qui permet d'obtenir immédiatement le développement de l'arc parabolique en série.

Dans la formule connue du binôme de Newton,

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}.x^2 +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}.x^3 + \text{etc.},$$

Digitized by Google

remplaçons les quantités a, x, par 1 et $\frac{x^2}{p^2}$, puis en outre m par $\frac{1}{2}$, il vient :

$$\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{x^2}{p^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{p^2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{x^2}{p^2}\right)^3-\frac{5}{128}\left(\frac{x^2}{p^2}\right)^4+\text{etc.}$$

Alors

$$\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx=dx+\frac{1}{2p^2}x^2dx-\frac{1}{8p^4}x^4dx+\frac{1}{16p^6}x^6dx-$$
$$-\frac{1}{128p^8}x^8dx+\ldots$$

Intégrant, il vient :

$$s=c+x+\frac{1}{2.3.p^2}x^3-\frac{1}{5.8.p^4}x^5+\frac{1}{7.16.p^6}x^7-\frac{5}{9.128.p^8}x^9+\ldots..$$

Substituant dans cette série à la place de p sa valeur $\frac{h^2}{2f}$, on a, en observant que $c=0$:

$$s=x+\frac{h^2}{2f}\left[\frac{1}{2.3}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^3-\frac{1}{5.8}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^5+\frac{1}{7.16}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^7-\right.$$
$$\left.-\frac{5}{9.128}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^9+\ldots..\right],$$

équation identique à l'équation (M) trouvée par l'autre méthode.

Théorème.

300.—On a démontré dans les courbes à centre du second degré, que si on mène d'un point deux sécantes coupant chacune la courbe en deux points, le produit des distances de ce point aux points d'intersection situés sur l'une des sécantes, est au produit des distances du même point aux points d'intersection situés sur la seconde, comme le carré du diamètre parallèle à la première sécante est au carré du diamètre parallèle à la seconde.

Nous allons maintenant exposer une méthode analytique pour démontrer ce théorème.

Digitized by Google

Soient AN, AN′ les deux sécantes, puis EE′, FF′ les diamètres qui leur sont parallèles, il faut prouver que $\frac{AM \times AN}{AM' \times AN'} = \frac{\overline{EE'}^2}{\overline{FF'}^2}$. Fig. 181.

Prenons pour axe des x le diamètre AO, et pour axe des y la ligne Ay parallèle à la tangente à la courbe, au point où le diamètre AO la rencontre; si on désigne la longueur AB par A, l'équation de la courbe sera $y^2 = m(x - A)^2 + 2p(x - A)$, et celle de la sécante AN sera $y = Hx$; désignons par θ l'angle des axes de coordonnées, et par α celui de la sécante AN avec l'axe des x. Si du point N on mène l'ordonnée NP et la perpendiculaire NC à l'axe, on forme le triangle rectangle ANC, d'où on tire :

$$\overline{AN}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{NC}^2;$$

or

$$NC = NP \sin NPC = y' \sin\theta, \quad \text{et} \quad AC = AN \cos\alpha,$$

en conséquence on a :

$$\overline{AN}^2 = y'^2 \sin^2\theta + \overline{AN}^2 \cos^2\alpha, \quad \text{ou} \quad \overline{AN}^2 = \frac{y'^2 \sin^2\theta}{\sin^2\alpha},$$

ainsi donc $AN = \frac{y' \sin\theta}{\sin\alpha}$; en appelant y'' l'ordonnée du point M on trouverait de la même manière $AM = \frac{y'' \sin\theta}{\sin\alpha}$. Donc le produit $AM \times AN = \frac{y'y'' \sin^2\theta}{\sin^2\alpha}$.

Cherchons maintenant l'expression du produit $y'y''$; pour cela éliminons l'abscisse x entre les équations

$$(1) \quad y^2 = m(x - A)^2 + 2p(x - A), \qquad (2) \quad y = Hx,$$

il vient l'équation

$$(3) \quad y^2\left(\frac{m}{H^2} - 1\right) - 2y\left(mA - \frac{p}{H}\right) + mA^2 - 2pA = 0;$$

or, dans une équation du second degré, le terme indépendant de l'inconnue divisé par le coefficient du terme du second degré, est le produit des racines de l'équation prises en signe contraire,

Digitized by Google

donc $y'y'' = \dfrac{mA^2 - 2pA}{\dfrac{m}{H^2} - 1}$. Substituant dans la valeur du produit AM × AN celle de $y'y''$, il vient :

$$AM \times AN = \frac{mA^2 - 2pA}{\dfrac{m}{H^2} - 1} \times \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\alpha}.$$

Maintenant il ne nous reste plus qu'à chercher la valeur du diamètre parallèle à AN. Cette valeur sera la même quelle que soit l'origine des axes de coordonnées ; prenons-la au centre O de la courbe, et les axes parallèles aux premiers ; l'équation de la courbe est $y^2 = mx^2 + \dfrac{p^2}{m}$. Désignons par D le diamètre OE et par y'' l'ordonnée de son extrémité E, on trouverait par la même méthode que ci-dessus $\overline{D}^2 = \dfrac{y'''^2 \sin^2\theta}{\sin^2\alpha}$, puisque OE est parallèle à AN ; pour obtenir y''', éliminons x entre les équations

$$(4) \quad y^2 = mx^2 + \frac{p^2}{m}, \quad (5) \quad y^2 = Hx,$$

il vient l'équation

$$(6) \quad y^2 = \frac{-p^2}{m\left(\dfrac{H^2}{m} - 1\right)},$$

transportant la valeur de y qu'on en déduit dans l'expression de $\overline{D}^2$, on a :

$$\overline{D}^2 = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\alpha} \times \frac{-p^2}{m\left(\dfrac{m}{H^2} - 1\right)}.$$

Des valeurs de AM × AN et de $\overline{D}^2$, on déduit l'égalité

$$\frac{AM \times AN}{\overline{D}^2} = -\frac{m(mA^2 - 2pA)}{p^2}.$$

Ainsi on voit que le rapport $\dfrac{AM \times AN}{\overline{D}^2}$ est indépendant de l'inclinaison de la sécante AN, donc

Digitized by Google

$$\frac{AM \times AN}{AM' \times AN'} = \frac{\overline{D}^2}{\overline{D'}^2} = \frac{\overline{EE'}^2}{\overline{FF'}^2}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

L'expression $-\frac{m(mA^2 - 2p)}{p^2}$ est égale au rapport $\frac{AB \times AB'}{\overline{OB}^2}$, car de l'équation $y^2 = mx^2 + 2px$, on tire $\frac{m^2}{p^2} = \frac{-1}{a'^2}$, en conséquence $-m\left(\frac{mA^2 - 2pA}{p^2}\right) = \frac{A(2a' + A)}{a'^2} = \frac{A(2a' + A)}{a'^2}$, a' étant le demi-diamètre OB. Si le point de concours des sécantes est à l'extérieur de la courbe en A, $2a' + A = AB'$, par conséquent

$$\frac{AM \times AN}{\overline{EO}^2} = \frac{AB \times AB'}{\overline{OB}^2}.$$

Si le point de concours est à l'intérieur en A', il faut donner à l'abscisse de ce point le signe moins, et alors $2a - A = A'B'$, par suite $\frac{A'M_{,} \times A'N_{,}}{\overline{EO}^2} = \frac{AB' \times A'B'}{\overline{OB}^2}$.

Donc le produit $AM \times AN$ est au produit $AB \times AB'$, comme les carrés des diamètres parallèles aux deux sécantes sont entre eux.

Le théorème se trouve démontré pour une courbe quelconque du second degré, et quelles que soient les positions des sécantes.

VARIÉTÉ DES COURBES DU SECOND DEGRÉ.

Ellipse.

301.—L'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes est $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

Désignons par c son excentricité, c'est-à-dire la distance du centre à l'un de ses foyers, on a trouvé que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, d'où on déduit $a^2 = b^2 + c^2$; transportant cette valeur de a^2 dans l'équation de la courbe, il vient :

Digitized by Google

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{c^2 + b^2}\right).$$

L'égalité $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ montre que, si dans une ellipse l'excentricité est nulle, les deux axes de la courbe sont égaux, et l'ellipse est alors une circonférence.

La même égalité montre que, si on fait décroître le petit axe d'une ellipse, son excentricité croît, et la courbe devient de plus en plus allongée.

Enfin si le petit axe b est nul, l'excentricité est égale au grand axe, et dans ce cas l'équation de la courbe se réduit à $y = 0$, c'est-à-dire que l'ellipse se réduit à une ligne droite, qui est le grand axe.

Maintenant supposons que le petit axe reste constant, mais qu'on fasse croître le grand axe; on voit par la relation $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, que l'excentricité va aller en croissant, et par suite que l'ellipse va devenir de plus en plus allongée.

Supposons que l'excentricité aille en croissant jusqu'à l'infini, alors l'équation de la courbe se réduit à $y = \pm b$, puisque le facteur $\frac{1}{b^2 + c^2} = \frac{1}{\infty} = 0$. Ainsi dans ce cas l'ellipse revient à un système de deux droites parallèles à son grand axe, et passant par les extrémités du petit axe.

Si les deux axes sont nuls, l'ellipse se réduit à un point.

La distance d'un foyer de l'ellipse au sommet le plus voisin est $a - \sqrt{a^2 - b^2}$. On démontre que si on fait croître le grand axe de l'ellipse jusqu'à l'infini, en laissant la quantité $d = a - \sqrt{a^2 - b^2}$ constante, la courbe qu'on obtient est symétrique par rapport au grand axe de l'ellipse, et qu'elle s'étend jusqu'à l'infini dans un sens; à cette variété d'ellipse on a donné le nom de *parabole*.

Hyperbole.

302.—L'équation de l'hyberbole rapportée à son centre et à ses axes est

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Supposons qu'on fasse décroître les axes de l'hyperbole, mais en

Digitized by Google

maintenant leur rapport constant, la courbe va aller en se rapprochant de ses asymptotes; car posons $\frac{b}{a}=K$, l'équation devient :

$$y^2 = K^2(x^2 - a^2).$$

On voit que plus a diminue, plus le facteur $x^2 - a^2$ s'approche de x^2; et à la limite $a = 0$, l'équation est $y = \pm Kx = \pm \frac{b}{a} x$, qui est celle des asymptotes; la relation $\frac{b}{a} = K$ montre que a décroissant, b décroît aussi. Donc les deux asymptotes d'une hyperbole sont les limites des hyperboles dont les axes vont en convergeant vers zéro, mais qui restent constamment proportionnels à ceux de l'hyperbole dont il s'agit.

Considérons des hyperboles qui aient même axe transverse. Le second axe peut varier depuis zéro jusqu'à l'infini; supposons $b = 0$, l'équation se réduit à $y = 0$; ainsi l'hyberbole, dont le second axe est nul, se réduit à deux droites indéfinies, qui sont les prolongements de l'axe transverse. A partir de zéro faisons croître le second axe, les branches de l'hyberbole deviennent de plus en plus ouvertes, puisque l'équation montre que pour la même abscisse les ordonnées croissent à mesure que b augmente. Supposons que le second axe devienne infini. L'équation de la courbe pouvant se mettre sous la forme $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$, montre que pour $b = \infty$, l'hyberbole se réduit à deux droites dont $x = \pm a$ est l'équation, c'est-à-dire que la courbe devient deux droites, perpendiculaires sur le grand axe à ses extrémités.

Supposons qu'on fasse décroître l'axe transverse, le second axe restant constant.

Au moyen de l'équation $y^2 = b^2\left(\frac{1}{a^2} x^2 - 1\right)$, on voit qu'à mesure que a diminue les ordonnées correspondant à une abscisse constante, vont en croissant; donc les branches de l'hyperbole deviennent dans cette hypothèse de plus en plus ouvertes. Enfin quand $a = 0$, l'équation de la courbe, mise sous la forme $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$, montre que l'hyperbole se réduit à son second axe prolongé dans les deux sens indéfiniment.

Digitized by Google

Parabole.

303.—L'équation de la parabole rapportée à son sommet et à son axe est $y^2 = 2px$.

Le paramètre de la parabole peut varier depuis zéro jusqu'à l'infini. Lorsque ce paramètre est nul, l'équation se réduisant à $y = 0$, la parabole est une ligne droite, qui est l'axe. Si on fait croître le paramètre p, la parabole devient de plus en plus ouverte, puisqu'à la même abscisse correspondent des ordonnées de plus en plus grandes.

Enfin si $p = \infty$, la parabole se réduit à une ligne droite, qui est la tangente menée par son sommet, car l'équation pouvant se mettre sous la forme $x = \frac{1}{2p} y^2$, montre que, dans ce cas, la courbe a pour équation $x = 0$, ce qui donne l'axe des y, ou la tangente à son sommet.

Méthode de calcul pour la détermination des longueurs des arcs des courbes.

304.—La méthode que nous allons exposer est extraite du grand ouvrage de Legendre sur les fonctions elliptiques (t. II, p. 588).

Fig. 182. Soit s la longueur de l'arc AM dont l'origine est fixée en A, et l'extrémité en M ayant pour coordonnées x et y. Cet arc a pour expression ordinaire $s = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$; on va maintenant chercher à l'exprimer par une autre formule permettant de l'obtenir avec toute l'approximation désirable, avantage que ne présente pas la première expression, car il arrive fort souvent qu'on ne peut pas intégrer $\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$.

Si du point C, centre des coordonnées, on mène CZ perpendiculaire sur la tangente au point M, et qu'on prenne pour nouvelles variables $CZ = p$ et l'angle $TMP = \alpha$, on aura l'angle $PCZ = \alpha$ et $CZ = p = MC \cos(\alpha - MCP)$; développant le second membre, et mettant, au lieu de $CM \cos MCP$ et $CM \sin MCP$, leurs valeurs x et y, on aura :

$$p = x \cos\alpha + y \sin\alpha.$$

Digitized by Google

Différentiant cette équation et observant qu'on a $dx = -ds \sin\alpha$ et $dy = ds \cos\alpha$, il viendra :

$$\frac{dp}{d\alpha} = y \cos\alpha - x \sin\alpha.$$

Au moyen de ces équations, on obtient les valeurs de x et y exprimées en fonction de p et α, savoir :

$$x = p \cos\alpha - \frac{dp}{d\alpha} \sin\alpha,$$

$$y = p \sin\alpha + \frac{dp}{d\alpha} \cos\alpha.$$

Enfin, de celles-ci on tire :

$$dx = -d\alpha \sin\alpha \left(p + \frac{d^2p}{d\alpha^2}\right), \quad dy = d\alpha \cos\alpha \left(p + \frac{d^2p}{d\alpha^2}\right);$$

donc $ds = d\alpha \left(p + \frac{d^2p}{d\alpha^2}\right)$, et intégrant,

$$s = \int p d\alpha + \frac{dp}{d\alpha} + c.$$

Telle est l'expression de l'arc dans laquelle il faut substituer la valeur de p en fonction de α.

On doit remarquer que si l'équation entre x et y est algébrique, l'équation entre p, $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ sera également algébrique.

Prenons $\int p d\alpha$ de manière à ce qu'elle s'évanouisse au point A, et désignons par $\frac{dp_0}{d\alpha}$ la valeur que prend l'expression $\frac{dp}{d\alpha}$ en ce point, on a :

$$s = \int p d\alpha + \frac{dp}{d\alpha} - \frac{dp_0}{d\alpha}.$$

Cette formule se simplifie en supposant que l'axe des abscisses CP, qu'on peut prendre arbitrairement, se confonde avec la perpendiculaire à la courbe menée par le point A ; car alors on aura en ce point $\alpha = 0$, et $\frac{dp_0}{d\alpha} = 0$, ce qui donnera :

Digitized by Google

$$s = \int p d\alpha + \frac{dp}{d\alpha}. \qquad (1)$$

Maintenant, pour avoir la longueur AMB = S', il faut prendre l'intégrale $\int p d\alpha$ depuis le point A, où nous supposons $\alpha = 0$, jusqu'au point B, où nous supposons $\alpha = \theta$. L'arc S' s'obtiendra en prenant pour $\int p d\alpha$ l'une des valeurs approchées $\int p d\alpha = \theta M$, $\int p d\alpha = \theta N$, dans lesquelles M est la moyenne entre les n quantités suivantes :

$$\frac{1}{2}(F_0 + F\theta), \quad F\frac{\theta}{n}, \quad F\frac{2\theta}{n} \ldots\ldots F\frac{n-1}{n}\theta;$$

et N est la moyenne entre les n quantités

$$F\frac{\theta}{2n}, \quad F\frac{3\theta}{2n}, \quad F\frac{5\theta}{2n} \ldots\ldots F\frac{2n-1}{2n}\theta,$$

c'est-à-dire entre les valeurs que prend la fonction $F(\alpha)$ représentant p, lorsqu'on y fait $\alpha = 0$, $\alpha = \theta$, $\alpha = \frac{\theta}{n}, \ldots\ldots \alpha = \frac{n-1}{n}\theta$, ou $\alpha = \frac{\theta}{2n}, \frac{3\theta}{2n}, \frac{5\theta}{2n}, \ldots\ldots \frac{2n-1}{2n}\theta$.

Le second terme $\frac{dp}{d\alpha}$ de l'équation (1) a pour expression dans le cas où l'on prend θM pour la valeur de $\int p d\alpha$:

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{dF}{d\theta} - \frac{1}{12}\left(\frac{\theta}{n}\right)^2 \frac{dF}{d\theta} + \frac{1}{720}\left(\frac{\theta}{n}\right)^4 \left(\frac{d^3F}{d\theta^3} - \frac{d^3F_0}{d\alpha^3}\right).$$

Dans le cas où on prendrait θN pour valeur approchée de la même intégrale on aurait :

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{dF}{d\theta} + \frac{1}{24}\left(\frac{\theta}{n}\right)^2 - \frac{7}{5760}\left(\frac{\theta}{n}\right)^4 \left(\frac{d^3F}{d\theta^3} - \frac{d^3F_0}{d\alpha_0^3}\right);$$

en sorte que la longueur de l'arc S' a pour valeur l'une des expressions suivantes :

Digitized by Google

$$S' = \theta M + \frac{dF}{d\theta} - \frac{1}{12}\left(\frac{\theta}{n}\right)^2 \frac{dF}{d\theta} + \frac{1}{720}\left(\frac{\theta}{n}\right)^4 \left(\frac{d^3F}{d\theta^3} - \frac{d^3F_0}{d\alpha_0^3}\right),$$

$$S' = \theta N + \frac{dF}{d\theta} + \frac{1}{24}\left(\frac{\theta}{n}\right)^2 \frac{dF}{d\theta} - \frac{7}{5760}\left(\frac{\theta}{n}\right)^4 \left(\frac{d^3F}{d\theta^3} - \frac{d^3F_0}{d\alpha_0^3}\right).$$

Ces formules se simplifient beaucoup si on a $\frac{dF}{d\alpha} = 0$, c'est-à dire si le rayon vecteur CB est perpendiculaire en B à la courbe ; or cette condition est toujours facile à remplir, parce qu'on peut prendre pour centre des coordonnées l'intersection des deux perpendiculaires à l'arc AMB menées par ses deux extrémités. Alors on aura :

$$S' = \theta M + \frac{1}{720}\left(\frac{\theta}{n}\right)^4 \left(\frac{d^3F}{d\theta^3} - \frac{d^3F_0}{d\alpha_0^3}\right),$$

$$S' = \theta N + \frac{7}{5760}\left(\frac{\theta}{n}\right)^4 \left(\frac{d^3F}{d\theta^3} - \frac{d^3F_0}{d\alpha_0^3}\right).$$

Ces égalités donneront S' avec toute l'approximation qu'on voudra, en prenant le nombre N assez grand pour que les termes où entre comme facteur $\left(\frac{\theta}{n}\right)^4$ puissent être négligés.

Dans l'ellipse et les courbes ovales analogues, en faisant $\theta = \frac{1}{2}\pi$, le nombre π représentant la demi-circonférence dont le rayon est A, les dernières expressions de S' se réduisent à

$$S' = M\frac{\pi}{2}, \qquad S' = \frac{\pi}{2}N.$$

Ainsi l'arc de la courbe a pour expression $S' = \frac{\pi}{4}(M + N)$, c'est-à-dire qu'il est le quart de la circonférence dont le rayon est $\frac{M+N}{2}$.

On peut remarquer que le résultat trouvé pour les courbes ovales composées de quatre secteurs à angle droit, égaux entre eux et placés symétriquement autour des axes communs, s'étend à une infinité d'autres courbes composées d'un même secteur qui se ré-

Digitized by Google

pète un certain nombre de fois dans des positions alternatives. Soit θ l'angle de ce secteur ; si θ est commensurable avec l'angle droit, la courbe rentrera sur elle-même après une ou plusieurs révolutions autour du centre commun de tous les secteurs ; mais si θ n'est pas commensurable avec l'angle droit, la courbe fera une infinité de révolutions autour de son centre. Dans tous les cas, l'arc de courbe qui termine le secteur dont l'angle est θ, a pour valeur la quantité θM ou θN, c'est-à-dire qu'il est égal à l'arc du secteur circulaire dont θ est l'angle et qui a pour rayon la valeur de M ou de N.

Cette théorie permet de trouver la longueur d'un arc quelconque d'une des courbes du second degré, et toute la question se trouve ramenée à trouver la fonction $p = F(\alpha)$ et à calculer ensuite M ou N.

Application.

305.—L'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Supposons, pour simplifier les calculs, $a = 1$, $y^2 = b^2(1 - x^2)$. On a trouvé que $p = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, il faut donc exprimer x et y en fonction des lignes trigonométriques de l'angle α. Pour cela on doit remarquer que $\frac{dy}{dx} = \cot\alpha$; alors, en résolvant les équations

$$(1) \qquad y^2 = b^2(1 - x^2), \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = \cot\alpha, \qquad (2)$$

on aura les valeurs de x et y.

L'équation (1) différentiée donne $\frac{dy}{dx} = -b^2\frac{x}{y} = \cot\alpha$, en conséquence

$$x^2 = \frac{\cot^2\alpha}{b^2 + \cot^2\alpha} \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{b^4}{b^2 + \cot^2\alpha};$$

dans ces valeurs, à la place de $\cot\alpha$, mettons $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, il vient :

Digitized by Google

$$x^2 = \frac{\cos^2\alpha}{b^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}, \quad y^2 = \frac{b^4\sin^2\alpha}{b^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

ou bien

$$x^2 = \frac{\cos^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha(1 - b^2)}, \quad y^2 = \frac{b^4\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha(1 - b^2)}.$$

Maintenant si on pose $b^2 = 1 - c^2$, il vient :

$$x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\alpha)}}, \quad y = \frac{b^2\sin\alpha}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\alpha)}}.$$

Transportant ces valeurs dans l'expression de p, on a :

$$p = \frac{\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\alpha)}} = \frac{1 - c^2\sin^2\alpha}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\alpha)}} = \sqrt{(1 - c^2\sin^2\alpha)}.$$

Ainsi on voit que pour l'ellipse, la fonction de l'angle α représentant la longueur de la perpendiculaire menée du centre sur la tangente, est

$$p = F(\alpha) = \sqrt{(1 - c^2\sin^2\alpha)}.$$

D'après cela le quart du périmètre de l'ellipse aura pour expression $\frac{\pi}{2}$ M ou $\frac{\pi}{2}$N. M étant la moyenne entre les n quantités suivantes :

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{(1 - c^2)\frac{\pi}{2}}\right), \quad \sqrt{1 - c^2\sin^2\frac{\pi}{2n}} \times \frac{\pi}{2n},$$

$$\sqrt{1 - c^2\sin^2\frac{2\pi}{2n}} \cdot \frac{2\pi}{2n},$$

$$\sqrt{(1 - c^2\sin^2)\frac{3\pi}{2n}} \cdot \frac{3\pi}{2n} \ldots\ldots \sqrt{1 - c^2\sin^2\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

N étant la moyenne entre les n quantités qui suivent :

Digitized by Google

$$\sqrt{1-c^2\sin^2\frac{\pi}{4n}}\cdot\frac{\pi}{4n},\quad \sqrt{1-c^2\sin^2\frac{3\pi}{4n}}\cdot\frac{3\pi}{4n},$$

$$\sqrt{1-c^2\sin^2\frac{5\pi}{4n}}\cdot\frac{5\pi}{4n},\ldots\quad \sqrt{1-c^2\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{4n}}\cdot\frac{(2n-1)\pi}{4n}.$$

Hyperbole.

306.—L'équation de l'hyperbole rapportée à son centre et à ses axes est

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2,$$

et en posant $a=1$, $y^2=b^2(x^2-1)$, différentiant cette dernière équation, il vient :

$$ydy=b^2xdx,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{y}.$$

Ainsi les équations donnant x et y en fonction des lignes trigonométriques de l'angle α sont

$$\frac{b^2x}{y}=\cot\alpha,\quad y^2=b^2(x^2-1).$$

En les résolvant, on a :

$$x^2=\frac{-\cot^2\alpha}{b^2-\cot^2\alpha}=\frac{-\cos^2\alpha}{b^2\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha},$$

$$y^2=\frac{-b^4}{b^2-\cot^2\alpha}=\frac{b^4}{\cot^2\alpha-b^2}=\frac{b^4\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha}.$$

Posant $b^2=c^2-1$, les valeurs de x^2 et y^2 deviennent :

$$x^2=\frac{\cos^2\alpha}{1-c^2\sin^2\alpha},\quad y^2=\frac{b^2\sin\alpha}{1-c^2\sin^2\alpha};$$

transportant ces valeurs dans l'expression de la perpendiculaire, il vient :

Digitized by Google

$$p = \frac{\cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\alpha}} = \frac{1 - \sin^2\alpha(1 - b^2)}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\alpha}} = \frac{1 - \sin^2\alpha\,(2 - c^2)}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\alpha}}.$$

Ainsi dans l'hyperbole, la fonction $F(\alpha) = p$ est

$$p = F(\alpha) = \frac{1 - \sin^2\alpha\,(2 - c^2)}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\alpha}}.$$

Ayant cette fonction, si on veut la longueur d'un arc hyperbolique, commençnat au sommet, on déterminera à l'aide des coordonnées x et y de son extrémité l'angle θ que fait l'axe tranverse avec le diamètre passant par cette extrémité, et on appliquera ensuite les formules générales à la fonction particulière qu'on vient d'obtenir.

307.—Nous avons vu que les formules se simplifient beaucoup toutes les fois que les extrémités de l'arc qu'on veut rectifier sont telles qu'en les joignant à l'origine des coordonnées, on obtient des lignes perpendiculaires en ces points à la courbe.

La marche à suivre pour obtenir l'expression de p est la même dans tous les cas, seulement ayant l'équation de la courbe $y^2 = b^2(x^2 - 1)$ rapportée à son centre et à ses axes, il faut trouver l'équation lorsque l'origine est au point où la normale à l'extrémité de l'arc à rectifier, coupe l'axe transverse.

Soit $x = m$ l'abscisse de la nouvelle origine, les axes restant parallèles, l'équation devient :

$$y^2 = b^2(x^2 + m^2 - 2mx - 1).$$

Désignons par x', y' les coordonnées de l'extrémité de l'arc dont il s'agit, on sait que le point où la normale en ce point coupe l'axe transverse a pour abscisse $(1+b^2)\,x'$, en conséquence $m = (1+b^2)\,x'$, alors l'équation de l'hyperbole est

$$y^2 = b^2[x^2 + x'^2(1 + b^2) - 2xx'(1 + b^2) - 1].$$

L'angle θ sera déterminé par l'équation

$$\tang\theta = \frac{y'}{x'(1 + b^2) - x'} = \frac{y'}{b^2 x'} = \frac{\sqrt{(x'^2 - 1)}}{bx'}.$$

Digitized by Google

Ainsi maintenant on a l'équation de la courbe rapportées à des axes les plus convenables pour déterminer, le plus simplement possible, la longueur de l'arc dont x', y' sont les coordonnées de la seconde extrémité, le sommet de l'hyperbole étant le point où il commence ; en outre on connaît l'angle θ formé par les deux rayons vecteurs extrêmes. En conséquence on peut appliquer les formules générales.

Parabole.

308.—La parabole étant une courbe sans centre, pour calculer à l'aide des formules développées ci-dessus la longueur d'un arc, il faut prendre pour origine des coordonnées un point tel que le rayon vecteur passant par l'une des extrémités soit perpendiculaire à la courbe et soit l'axe des abscisses, et que l'autre rayon vecteur passant par la seconde extrémité de l'arc soit pareillement perpendiculaire à la parabole.

L'équation de la parabole rapportée à son axe et à son sommet est

$$y^2 = 2px.$$

Supposons que l'arc à rectifier commence à l'origine, et que x', y' soient les coordonnées de l'autre extrémité. Le point où la normale au point (x', y') coupe l'axe des x a pour abscisse $x'+p$. Transportons en ce point les axes parallèlement à eux-mêmes, l'équation de la parabole devient :

$$y^2 = 2p(x+p+x').$$

L'angle θ des deux rayons vecteurs est donné par l'équation

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y'}{p}.$$

Maintenant ayant l'équation de la courbe rapportée à des axes convenablement choisis, cherchons la fonction $p = F(\alpha)$.

On a les deux équations

$$\frac{dy}{dx} = \cot\alpha, \quad y^2 = 2A(x+A+x'),$$

A désignant le demi-paramètre afin d'éviter toute confusion.

Digitized by Google

Résolvant ces deux équations par rapport à x et y, il vient :

$$y = \frac{2A}{\cot\alpha}, \quad x = \frac{2A}{\cot^2\alpha} - (A + x') = \frac{2A - \cot^2\alpha\,(A + x')}{\cot^2\alpha}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de p, on a :

$$p = \frac{2A - \cot^2\alpha\,(A + x')}{\cot^2\alpha}\cos\alpha + \frac{2A}{\cot\alpha}\sin\alpha.$$

Remplaçant $\cot\alpha$ par sa valeur $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, il vient, en posant $A + x' = B$:

$$p = \frac{\sin^2\alpha\,(2A - B\cot^2\alpha)}{\cos\alpha} + \frac{2A\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4A\sin^2\alpha - B\sin^2\alpha\cot^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Équation qu'on peut mettre encore sous la forme

$$p = \frac{4A\sin^4\alpha - B\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin^2\alpha} = \frac{4A\sin^2\alpha - B\cos^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Ainsi on a :

$$p = F(\alpha) = \frac{\sin^2\alpha\,(4A + B) - B}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}.$$

Dans la position où se trouvent les axes, l'arc sera donné par l'une des formules :

$$S' = \theta M + \frac{1}{720}\left(\frac{\theta}{n}\right)^4\left(\frac{d^3F}{d\theta^3} - \frac{d^3F_0}{d\alpha^3}\right)$$

$$S' = \theta N - \frac{7}{5760}\left(\frac{\theta}{n}\right)^4\left(\frac{d^3F}{d\theta^3} - \frac{d^3F_0}{d\alpha^3}\right).$$

Les quantités M et N sont toujours déterminées par la même méthode, quelle que soit la position des axes de coordonnées.

Cette méthode pour rectifier un arc parabolique n'est jamais employée, on ne l'a exposée ici que comme application de la méthode générale.

Digitized by Google

Développées.

309.—L'équation générale $s=\int p d\alpha + \frac{dp}{d\alpha} - \frac{dp_0}{d\alpha}$ sert à démontrer une propriété remarquable des développées des courbes du second degré, qu'on énonce de la manière suivante :

Les arcs des développées compris entre deux points, tels que α, α', soient les angles que font les tangentes à la courbe en ces points, avec l'axe des x, s'expriment en fonction algébrique des lignes trigonométriques de ces angles.

Ellipse.

L'équation de la développée de l'ellipse peut être ramenée à la forme

$$\left(1-\frac{x}{m}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1-\frac{y}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

m, n désignent les coordonnées des points où l'une des quatre branches coupe les axes.

Fig. 97. Si les axes sont $O'y'$, $O'x'$, de cette manière les deux rayons vecteurs extrêmes sont perpendiculaires à la courbe.

Les axes de l'ellipse dont provient cette courbe, se déterminent au moyen des équations

$$m = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad n = \frac{a^2 - b^2}{b}.$$

Pour déterminer l'équation

$$(1) \qquad p = x \sin\alpha + y \cos\alpha.$$

On a les deux autres

$$(2) \qquad \left(1-\frac{x}{m}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1-\frac{y}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \tang\alpha. \qquad (3)$$

L'équation (2) différentiée donne :

Digitized by Google

$$\frac{dx}{m}\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-\frac{1}{3}}+\frac{dy}{n}\left(1-\frac{y}{n}\right)^{-\frac{1}{3}}=0,$$

d'où on tire :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{n}{m}\frac{\left(1-\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1-\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

En conséquence l'équation (3) devient :

$$m\left(1-\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{3}}\tang\alpha=n\left(1-\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad (4)$$

Éliminant y entre les équations (2), (4), on a :

$$\left(1-\frac{x}{m}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{m^2}{n^2}\left(1-\frac{x}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\tang^2\alpha=1\ ;$$

d'où $$\left(1-\frac{x}{m}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{1+\frac{m^2}{n^2}\tang^2\alpha}=\frac{n^2}{n^2+m^2\tang^2\alpha}.$$

Éliminant ensuite y, on trouve de même :

$$\left(1-\frac{y}{n}\right)^{\frac{2}{3}}=1-\frac{n^2}{n^2+m^2\tang^2\alpha}=\frac{m^2\tang^2\alpha}{n^2+m^2\tang^2\alpha};$$

enfin déduisant les valeurs de x et y, on a :

$$x=m-\frac{mn^3}{(n^2+m^2\tang^2\alpha)^{\frac{3}{2}}},\quad y=n-\frac{nm^3\tang^3\alpha}{(n^2+m^2\tang^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dans ces valeurs substituons à $\tang\alpha$ son expression $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, il vient :

Digitized by Google

$$x = m - \frac{mn^3\cos^3\alpha}{(n^2\cos^2\alpha + m^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} = m - \frac{mn^3\cos^3\alpha}{[m^2 - (m^2 - n^2)\cos^2\alpha]^{\frac{3}{2}}},$$

$$y = n - \frac{nm^3\sin^3\alpha}{(n^2\cos^2\alpha + m^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} = n - \frac{nm^3\sin^3\alpha}{[m^2 - (m^2 - n^2)\cos^2\alpha]^{\frac{3}{2}}},$$

posant $m^2 - n^2 = c^2$, il vient :

$$x = m - \frac{mn^3\cos^3\alpha}{(m^2 - c^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}, \quad y = n - \frac{nm^3\sin^3\alpha}{(m^2 - c^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituant ces dernières valeurs dans l'équation (1), on a :

$$p = m\sin\alpha + n\cos\alpha - \frac{mn^3\cos^3\alpha\sin\alpha + nm^3\sin^3\alpha\cos\alpha}{(m^2 - c^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le terme fractionnaire du second membre peut se mettre sous la forme :

$$\frac{mn\sin\alpha\cos\alpha(n^2\cos^2\alpha + m^2\sin^2\alpha)}{(m^2 - c^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{mn\sin\alpha\cos\alpha}{(m^2 - c^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}},$$

en sorte que l'équation (1) devient :

$$p = m\sin\alpha + n\cos\alpha - \frac{mn\sin\alpha\cos\alpha}{(m^2 - c^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

Maintenant pour avoir la valeur de s, il faut intégrer $\int p d\alpha$, et alors remplaçant p par sa valeur, on a :

$$\int p d\alpha = -m\int\sin\alpha d\alpha + n\int\cos\alpha d\alpha - mn \times \int\frac{\sin\alpha\cos\alpha d\alpha}{(m^2 - c^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

Effectuant les premières intégrations partielles, il vient :

$$\int p d\alpha = -m\cos\alpha + n\sin\alpha - mn\int\frac{\sin\alpha\cos\alpha d\alpha}{(m^2 - c^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

Digitized by Google

Pour intégrer la dernière expression, remarquons que

$$d(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}=c^2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha\,(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

en conséquence

$$\int\frac{\sin\alpha\cos\alpha d\alpha}{(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{c^2}\int d(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}};$$

alors $\int pd\alpha=-m\cos\alpha+n\sin\alpha-\frac{mn}{c^2}(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}+\text{const.}$

On voit que $\int pd\alpha$ étant une intégrale complète, il s'ensuit que $\frac{dp}{d\alpha}$, $\frac{dp_0}{d\alpha}$ seront algébriques et que par suite l'arc s a une valeur algébrique en fonction des lignes trigonométriques de l'angle α. Il ne nous reste plus qu'à le déterminer.

L'intégrale $\int pd\alpha$ doit être nulle pour $\alpha=0$, cette condition donne à la constante pour valeur $\frac{m^3}{c^2}$, ainsi

$$\int pd\alpha=-m\cos\alpha+n\sin\alpha-\frac{mn}{c^2}(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}+\frac{m^3}{c^2}.$$

Cherchons la valeur de $\frac{dp}{d\alpha}$, et pour cela différentions l'équation (1), il vient :

$$\frac{dp}{d\alpha}=m\cos\alpha-n\sin\alpha-\frac{mn}{(m^2-c^2\cos^2\alpha)}\Big[(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-$$

$$-\sin\alpha\cos\alpha c^2\sin\alpha\cos\alpha\,(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{-\frac{1}{2}}\Big].$$

Réduisant tous les termes entre parenthèse au même dénominateur, il vient :

$$\frac{dp}{d\alpha}=m\cos\alpha-n\sin\alpha-\frac{mn}{(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}[m^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-c^2\cos^4\alpha],$$

de là on tire :

Digitized by Google

$$\frac{dp_0}{d\alpha}=m-\frac{mn}{(m^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}(m^2-c^2)=m-\frac{mn}{(m^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}=m-\frac{mn}{n}=0$$

Substituant les valeurs de l'intégrale, de $\frac{dp}{d\alpha}$, $\frac{dp_0}{d\alpha}$ dans l'expression de l'arc s, il vient :

$$s=-m\cos\alpha+n\sin\alpha-\frac{mn}{c^2}m^2-c^2\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}+\frac{m^3}{c^2}+m\cos\alpha-$$

$$-n\sin\alpha-\frac{mn}{(m^2-n^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}[m^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-c^2\cos^4\alpha];$$

simplifiant, on a :

$$s=\frac{m^3}{c^2}-\frac{mn}{c^2(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}[m^4+c^4\cos^2\alpha-2m^2c^2\cos^2\alpha+$$

$$+m^2c^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-c^4\cos^4\alpha];$$

réduisant encore, l'équation devient :

$$s=\frac{m^3}{c^2}-\frac{mn}{c^2(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}[m^2(m^2-c^2)]=\frac{m^3}{c^2}\left[1-\frac{n^3}{(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Ainsi l'arc s a pour expression

$$s=\frac{m^3}{c^2}\left[1-\frac{n^3}{(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Supposons qu'on prenne un arc tel que les tangentes à ses extrémités fassent avec l'axe des x les angles α, α', d'après l'équation à laquelle on vient de parvenir, on aura :

$$s=\frac{m^3n^3}{c^2}\left[\frac{1}{(m^2-c^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{(m^2-c^2\cos^2\alpha')^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Digitized by Google

Donc le théorème énoncé sur les développées est démontré par celle de l'ellipse.

Hyperbole.

310.—Si on prend pour axes de coordonnées la tangente au point où deux branches se terminent et la perpendiculaire en ce point à la tangente, l'équation de la développée de l'hyperbole est de la forme Fig. 98.

$$my^{\frac{2}{3}} - n(A - x)^{\frac{2}{3}} = -1.$$

Les axes de coordonnées étant My', Mx', les axes de la courbe d'où elle provient sont donnés par les équations

$$m = \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad n = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}}, \text{ la quantité A représente } \frac{a^2+b^2}{a}.$$

Pour déterminer l'équation $p = x\sin\alpha + y\cos\alpha$, on a les équations

$$(1) \qquad my^{\frac{2}{3}} - n(A - x)^{\frac{2}{3}} = -1, \qquad \frac{dy}{dx} = -\tang\alpha. \qquad (2)$$

En différentiant l'équation (1), l'équation (2) devient

$$\tang\alpha = \frac{-ny^{\frac{1}{3}}}{m(A - x)^{\frac{1}{3}}};$$

d'où on tire :

$$n(A - x)^{\frac{2}{3}} = \frac{n^3 y^{\frac{2}{3}}}{m^2 \tang^2\alpha}.$$

Portant cette expression dans l'équation (1), il vient :

$$my^{\frac{2}{3}} - \frac{n^3}{m^2 \tang^2\alpha} y^{\frac{2}{3}} = -1, \qquad \text{d'où} \qquad y^{\frac{2}{3}} = \frac{m^2 \tang^2\alpha}{n^3 - m^3 \tang^2\alpha},$$

Digitized by Google

et par suite $$y = \frac{m^3 \tang^3 \alpha}{(n^3 - m^3 \tang^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Portant la valeur de y dans l'équation (1), on en déduit :

$$(A - x)^{\frac{2}{3}} = \frac{n^2}{n^3 - m^3 \tang^2 \alpha}, \quad \text{d'où} \quad x = A + \frac{-n^3}{(n^3 - m^3 \tang^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi on aura donc :

$$x = A + \frac{-n^3}{(n^3 - m^3 \tang^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}, \qquad y = \frac{m^3 \tang^3 \alpha}{(n^3 - m^3 \tang^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Remplaçant dans ces valeurs $\tang \alpha$ par $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, puis posant $n^3 + m^3 = c^3$, il vient :

$$x = A + \frac{-n^3 \cos^3 \alpha}{(n^3 - c^3 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}, \qquad y = \frac{m^3 \sin^3 \alpha}{(n^3 - c^3 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituant les valeurs de x et y dans la fonction à déterminer, on a :

$$p = A \sin \alpha + \frac{-n^3 \cos^3 \alpha \sin \alpha + m^3 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{(n^3 - c^3 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= A \sin \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha (-n^3 \cos^2 \alpha + m^3 \sin^2 \alpha)}{(n^3 - c^3 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{ou } p = A \sin \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha (n^3 - c^3 \sin^2 \alpha)}{(n^3 - c^3 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} = A \sin \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(n^3 - c^3 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

La fonction p étant trouvée, déterminons $\frac{dp}{d\alpha}$, $\frac{dp_0}{d\alpha}$.

On a :

Digitized by Google

$$\frac{dp}{d\alpha} = A\cos\alpha + \frac{1}{(n^3 - c^3\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}[m^3(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) - c^3\sin^4\alpha],$$

$$\frac{dp_0}{d\alpha} = A - \frac{n^3}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Il ne nous reste plus qu'à intégrer,

$$\int p d\alpha = A\int \sin\alpha\, d\alpha - \int \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{(n^3 - c^3\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Effectuant les deux intégrations, il vient :

$$\int p d\alpha = -A\cos\alpha + \frac{1}{c^3}(n^3 - c^3\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} + \text{const.}$$

La constante se détermine par cette condition que pour $\alpha = 0$, l'intégrale $\int p d\alpha$ doit être nulle. Ce qui donne const. $= A - \frac{1}{c^3}n^{\frac{3}{2}}$. En conséquence

$$\int dp\alpha = A - \frac{n^{\frac{3}{2}}}{c^3} - A\cos\alpha + \frac{1}{c^3}(n^3 - c^3\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}.$$

Les quantités $\frac{dp}{d\alpha}$, $\frac{dp_0}{d\alpha}$, $\int p d\alpha$ étant déterminées, on a pour la valeur de l'arc :

$$s = A - \frac{n^{\frac{3}{2}}}{c^3} - A\cos\alpha + \frac{1}{c^3}(n^3 - c^3\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} + A\cos\alpha +$$

$$+ \frac{1}{(n^3 - c^3\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}[n^3(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) - c^3\sin^4\alpha] - A + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Réduisant tous les termes au même dénominateur et simplifiant, il vient :

Digitized by Google

$$s = \frac{-n^3 + c^3}{c^3 n^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{c^3 (n^3 - c^3 \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} [n^6 + c^6 \sin^4\alpha - 2n^3 c^3 \sin^2\alpha +$$

$$+ n^3 (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) c^3 - c^6 \sin^4\alpha];$$

$$s = \frac{-n^3 + c^3}{n^{\frac{3}{2}} c^3} + \frac{1}{c^3 (n^3 - c^3 \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} (n^6 - n^3 c^3).$$

Enfin, remplaçant $n^6 - n^3c^3$ par $-n^3m^3$, on a :

$$s = \frac{m^3}{c^3} \left[\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{m^3}{(n^3 - c^3 \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Telle est l'expression de la longueur d'un arc commençant à l'un des points de rebroussement. D'après cela, la longueur d'un arc compris entre deux points tels que les tangentes à la courbe en ces points fassent avec l'axe des x les angles α, α', a pour expression :

$$s' = \frac{n^3 m^3}{c^3} \left[\frac{1}{(n^3 - c^3 \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(n^3 - c^3 \sin^2\alpha')^{\frac{3}{2}}} \right],$$

équation qui démontre le théorème énoncé sur la développée de l'hyperbole.

Parabole.

311.—L'équation de la développée de la parabole peut être ramenée à la forme

$$ay^2 = \frac{4}{27} x^3.$$

Fig. 96.

My', Mx étant les axes de coordonnées, leur origine est à son point de rebroussement, et l'axe des x est la tangente en ce point à la courbe. L'équation qui détermine le paramètre de la parabole est

$$a = \frac{p}{2}.$$

Les équations déterminant la fonction $p = x \sin\alpha + y \cos\alpha$ sont :

Digitized by Google

$$ay^2 = \frac{4}{27}x^3, \qquad \frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\alpha = \frac{2x^2}{9ay}.$$

Éliminant y, on trouve $x = 3a\,\text{tang}^2\alpha$, puis ensuite il vient $y = 2a\,\text{tang}^3\alpha$. En conséquence

$$p = 3a\,\text{tang}^2\alpha\sin\alpha + 2a\,\text{tang}^3\alpha\cos\alpha = \frac{3a\sin^3\alpha + 2a\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$= 5a\sin\alpha \times \text{tang}^2\alpha.$$

Ainsi $$p = 5a\sin\alpha\,\text{tang}^2\alpha.$$

Alors

$$\frac{dp}{d\alpha} = 5a\left(\text{tang}^2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\frac{2}{\cos^2\alpha}\text{tang}\,\alpha\right) = 5a\left(\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}\right),$$

et par suite

$$\frac{dp_0}{d\alpha} = 0.$$

Cherchons maintenant l'intégrale $\int p\,d\alpha$.

On a : $$\int p\,d\alpha = 5a\int\sin\alpha\,\text{tang}^2\alpha\,d\alpha = 5a\left(\int\frac{\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha\right) =$$

$$= 5a\left(\sin^3\alpha\,\text{tang}\,\alpha - 3\int\text{tang}\,\alpha\sin^2\alpha\cos\alpha\,d\alpha\right),$$

ou $$\int p\,d\alpha = 5a\left(\sin^3\alpha\,\text{tang}\,\alpha - 3\int\sin^3\alpha\,d\alpha\right).$$

Or on sait que $\int\sin^3\alpha\,d\alpha = -\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha + 2\cos\alpha}{3}$; substituant cette expression dans $\int p\,d\alpha$, il vient :

$$\int p\,d\alpha = 5a\left(\sin^3\alpha\,\text{tang}\,\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha + 2\cos\alpha\right) + \text{const.}$$

En faisant $\alpha = 0$, $\int p\,d\alpha$ devant être zéro, on a const. $= -10a$;

ainsi $$\int p\,d\alpha = 5a\left(\sin^3\alpha\,\text{tang}\,\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha + 2\cos\alpha - 2\right).$$

Par conséquent

$$s = 5a\left(\sin^3\alpha\,\text{tang}\,\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha + 2\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha} - 2\right),$$

Digitized by Google

égalité qu'on peut mettre sous la forme :

$$s = 5a\left(\frac{\cos^2\alpha \tang^2\alpha + 2\tang^2\alpha + \sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\cos\alpha} - 2\right) =$$

$$= 5a\left(\frac{\cos^2\alpha \tang^2\alpha + 2\tang^2\alpha + 1 + \cos^2\alpha}{\cos\alpha} - 2\right).$$

Remplaçant $\tang\alpha$ par $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, puis réduisant tous les termes au même dénominateur $\cos^3\alpha$, il vient :

$$s = 5a\left(\frac{\cos^2\alpha \sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{\cos^3\alpha} - 2\right) =$$

$$= 5a\left[\frac{2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha} - 2\right].$$

Enfin l'expression de l'arc réduite à la plus grande simplicité est

$$s = 5a\left(\frac{2}{\cos^3\alpha} - 2\right) \text{ ou encore } s = 10a\left(\frac{1}{\cos^3\alpha} - 1\right).$$

Maintenant considérons sur la courbe un second point tel que la tangente en ce point fasse avec l'axe des x l'angle α', l'arc compris entre ce point et celui où la tangente fait l'angle α avec le même axe, a pour expression :

$$s' = 10a\left(\frac{1}{\cos^3\alpha'} - \frac{1}{\cos^3\alpha}\right),$$

équation qui démontre le théorème énoncé.

Considérations générales.

Reprenons les formules

$$(1) \quad s = \int p\,d\alpha + \frac{dp}{d\alpha} - \frac{dp_0}{d\alpha}, \quad (2) \quad x = p\cos\alpha - \frac{dp}{d\alpha}\sin\alpha,$$

$$(3) \qquad y = p\sin\alpha + \frac{dp}{d\alpha}\cos\alpha.$$

Digitized by Google

Supposons qu'on prenne p de manière à obtenir $\int p d\alpha$ algébriquement ; ainsi posons $\int p d\alpha = q$, alors avec les deux autres équations on obtiendra, par l'élimination de l'angle α, l'équation d'une courbe qui est rectifiable, comme le sont toutes les développées des courbes algébriques.

L'hypothèse admise donne $p = \frac{dq}{d\alpha}$.

$$x = \frac{dq}{d\alpha}\cos\alpha - \frac{d^2q}{d\alpha^2}\sin\alpha, \quad y = \frac{dq}{d\alpha}\sin\alpha + \frac{d^2q}{d\alpha^2}\cos\alpha,$$

$$\text{et l'arc } s = q + \frac{d^2q}{d\alpha^2} + \text{const.}$$

Comme on peut donner à p un grand nombre de valeurs, telles que $\int p d\alpha$ soit algébrique, il s'ensuit qu'à l'aide des équations (1), (2), (3) on peut avoir un grand nombre de courbes rectifiables et en même temps la valeur d'un arc de ces courbes terminé à deux points donnés.

Digitized by Google

APPENDICE.

Génération.

312.—Une courbe quelconque étant donnée, on peut concevoir qu'un point soit doué d'un mouvement tel, qu'à chaque instant la direction de ce mouvement venant à varier, ce point serait constamment sur la courbe, ou, en d'autres termes, décrirait cette courbe. Il suit de là qu'une courbe peut être donnée par la loi du mouvement d'un point générateur.

Supposons que toutes les forces qui agissent sur un point matériel soient en même plan, quel que soit leur nombre on peut toujours les remplacer par deux forces uniques; soient AB, AC leurs directions. Admettons que dans le temps t très-court le point A vînt en B sous l'action unique de la force P, et en C sous celle de la force Q, alors sous l'action combinée des deux forces P, Q, il suivra la direction AD et viendra en D, extrémité de la diagonale du parallélogramme ABCD, dans le même temps t. Le point A arrivé en D, va se transporter en G extrémité du parallélogramme construit sur les lignes DE, EF représentant les espaces parcourus par ce même point s'il avait été soumis successivement à l'influence des forces P, Q dans le temps t, les directions et les intensités des forces P, Q étant données par la loi du mouvement. L'espace de temps t doit être pris assez court pour qu'on puisse pendant ce temps considérer les forces P, Q variables, comme constantes; il suit de cette observation que les lignes AD, DG, GH sont très-petites et représentent les éléments de la courbe décrite par le point.

Fig. 183.

Donc à un instant donné la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces représente la direction d'un élément de la courbe décrite.

Si les forces agissant sur le point ne sont pas toutes en même plan, on pourra les réduire à trois, et alors chaque élément de la courbe décrite par le point sera donné en direction par la diagonale du parallélipipède construit sur ces trois forces.

Digitized by Google

313.—Par un point donné sur une courbe plane, mener une tangente et une normale à cette courbe.

Soit M le point donné sur la courbe MHH', soient MC, MD les directions des deux forces agissant sur le point M, construisons sur ces lignes, représentant en grandeur les forces P, Q un parallélogramme; dans sa diagonale MG on a la direction et l'intensité de la résultante R; cette ligne MG est la tangente cherchée, puisqu'elle est la direction que prend le point générateur de la courbe au point que l'on considère M, sous l'influence des forces données P, Q. Fig. 10.

La tangente en M étant MG, la normale en ce même point est la perpendiculaire MN à la tangente. (Telle est la méthode de Roberval, géomètre français, pour mener des tangentes aux courbes.)

314.—Par un point donné hors d'une courbe mener une tangente à cette courbe.

Soient MNP la courbe donnée et A le point extérieur par lequel il faut mener une tangente à la courbe. Par les points m, m', m'', m'''..... n, n', n''..... menons des normales à la courbe, puis ensuite du point A abaissons des perpendiculaires sur ces lignes, soient q, q', q'', q'''..... p, p', p'', p'''..... les points où elles les rencontrent. Si on a pris les points sur la courbe très-rapprochés, q, q', q''..... vont déterminer une courbe auxiliaire qu'il est facile de construire; les points où elle va couper la courbe proposée, car généralement il y en a plusieurs, sont les points de contact des tangentes, menées du point A à la courbe MNP. Soit P l'un d'eux, la ligne AP est perpendiculaire à la normale en P à la courbe MNP, et comme elle la rencontre au point P de cette courbe, il s'ensuit que AP est la tangente demandée, P étant son point de contact. Du point A il y autant de tangentes possibles à la courbe, que la courbe auxiliaire rencontre de fois la courbe donnée. Fig. 184.

La méthode générale qu'on vient d'exposer est celle qu'on suit en géométrie élémentaire pour mener une tangente en un point donné hors d'une circonférence. En effet, soit OA une circonférence et M le point donné extérieurement. Sur la ligne OM comme diamètre décrivons une circonférence, cette courbe est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les normales à la circonférence OA; car un rayon quelconque OH est une normale à la circonférence OA; alors joignant le point H où elle coupe la seconde circonférence au point M, l'angle OHM est droit comme inscrit dans un demi-cercle. Donc HM est perpendiculaire à OH; alors les points A et B où les deux courbes se coupent joints à M Fig. 85.

Digitized by Google

donnent les deux tangentes qu'on peut mener du point donné à la circonférence OA.

315.—Mener une tangente parallèle à une ligne donnée.

Soient CDE la courbe donnée et AB la ligne à laquelle doit être parallèle la tangente. Par les points m, m', m'', m'''..... menons dans le même sens des tangentes à la courbe, et prenons sur elles des longueurs égales à partir des points de contact.

Fig. 185. Soient p, p', p'', p'''..... les points ainsi déterminés. Par ces mêmes points menons des parallèles à la ligne donnée AB et prenons sur elles des longueurs égales à partir de leurs points de départ. Soient s, s', s'', s'''..... les points qu'on détermine. Ces derniers points appartiennent à une courbe auxiliaire qu'il est facile de tracer si les points sur la courbe CDE sont pris suffisamment rapprochés les uns des autres.

La courbe auxiliaire $ss's''s'''$..... rencontre la courbe en un ou plusieurs points, mais généralement en plusieurs; soit M l'un d'eux, par ce point menons MP parallèle à AB, cette ligne est la tangente demandée. Car concevons une tangente parallèle à AB, la ligne analogue à ps se confond avec cette tangente, et le point analogue à s coïncide avec le point de contact. Donc ce point sera M, intersection de la courbe auxiliaire avec la courbe donnée. Donc MP est la tangente cherchée.

La courbe CDE possédera autant de tangentes parallèles à AB qu'elle sera coupée de fois par la courbe auxiliaire $ss's''s'''$.....

316.—Par un point donné hors d'une courbe mener une normale à cette courbe.

Soient MNP la courbe donnée, et Q le point donné. Par les points m_1, m_2, m_3, m_4..... pris arbitrairement sur la courbe menons des normales à cette courbe, ces lignes en se coupant déterminent une suite de points q, q', q'', q''' qui constituent une courbe telle que ses tangentes sont normales à la ligne donnée; et réciproquement toutes les normales à la courbe donnée sont des tangentes à la courbe auxiliaire.

Fig. 184. Cette courbe se trace aisément si les points m_1, m_2, m_3, m_4 sont très-rapprochés les uns des autres. Maintenant du point donné Q menons une tangente à la courbe auxiliaire; cette tangente RQ, d'après l'observation faite précédemment, est une normale à la courbe MNP, et comme elle passe au point Q, il s'ensuit qu'elle est la normale demandée.

Digitized by Google

Il y aura autant de normales à la courbe passant par le point Q qu'il est possible de mener de tangentes à la courbe auxiliaire par le même point.

La courbe auxiliaire qu'on a employée est la développée de la ligne MNP. Pour la construire il suffit de mener à MNP une suite de normales et de déterminer la courbe qui est tangente à toutes ces lignes.

317.—Mener une normale à une courbe parallèle à une ligne donnée.

Soient la courbe MNP, et AB la ligne donnée. A la courbe MNP menons une tangente parallèle à XY, qui est perpendiculaire sur AB, soit BD cette tangente, et D son point de contact; si par le point D on mène une perpendiculaire à BD, on a dans la ligne RQ qu'on détermine ainsi, la normale demandée. Cette construction montre qu'il y a autant de normales parallèles à AB qu'il y a de tangentes parallèles à XY. Fig. 184.

On est maintenant à même de reconnaître que le plus souvent les propriétés particulières des courbes sur lesquelles on opère, donnent des procédés beaucoup plus simples que ceux que l'on vient de présenter, pour mener une tangente à une courbe, soit par un point extérieur à cette courbe, soit parallèlement à une droite donnée.

318.—Mener une normale commune à deux courbes données.

On va prendre deux ellipses ayant deux positions quelconques par rapport l'une à l'autre, et ce qu'on va dire pour ces courbes s'appliquera à deux autres quelconques.

Soient MNP, M'N'P' les deux ellipses données, et O, O' leurs centres. Aux deux sommets A, B de la première, tirons les deux tangentes, puis prenons sur la partie AMB une suite de points très-rapprochés les uns des autres, soient a, b, c, d, e, f, g..... Par ces points menons des tangentes à l'ellipse que nous désignons par A1, b2, c3, d4, e5, f6..... Des numéros d'ordre aux extrémités des tangentes rendent dans la construction graphique une erreur plus difficile à commettre. Fig. 195.

A la seconde ellipse menons deux tangentes A'1, B'1 parallèles à A1, B1; soient A', B' les points de contact de ces tangentes; sur la partie A'M'B' menons des tangentes parallèles à celles tracées sur la première ellipse; soient a', b', c', d', e', f', g'..... les points de contact et a'2, b'3, c'4, d'5, e'6, f'7..... ces lignes. Maintenant des

Digitized by Google

points de contact A', a', b', c', d'. ... B', abaissons des perpendiculaires sur les tangentes A1, $a2$, $b3$, $c4$, $d5$.... B1; soient α, β, γ, δ..... les pieds de ces perpendiculaires, tous ces points déterminent une courbe qui sera d'autant plus facile à tracer que les points a, b, c, d, e, f, g..... auront été pris plus rapprochés les uns des autres.

Cette courbe a tous ses points hors de l'ellipse MNP, puisqu'ils appartiennent à des tangentes à cette dernière; si les deux parties de courbe AMB, A'M'B' ont une normale commune, il est évident que cette ligne est une des perpendiculaires tracées dont le pied est sur l'ellipse MNP. Ainsi donc si la courbe qu'on vient de tracer est tangente à l'ellipse MNP, son point de contact est le point où la normale cherchée rencontre la première ellipse. Dans le cas qui nous occupe, on voit que la courbe auxiliaire est tangente à l'ellipse en M. Alors, si en ce point on mène la normale à l'ellipse MNP, cette lignes MM' est la ligne demandée. Car la courbe $\alpha\beta\gamma\delta$..... est telle que si d'un de ses points on mène une tangente à l'ellipse MNP et une perpendiculaire à cette tangente, la ligne qu'on obtient est normale à la seconde ellipse M'N'P'; or, le point M' étant sur les deux courbes, il s'ensuit que la perpendiculaire en M à la tangente menée de ce point est normale à l'ellipse MNP, et en vertu de ce que nous venons de dire, elle est aussi normale à l'ellipse M'N'P'; on en conclut qu'elle est la normale commune aux deux parties de courbe AMB, A'M'B'.

Si on considérait les deux parties AMB et A'P'B, et qu'on répétât la construction qu'on vient de faire, on trouverait une seconde normale. Il faut remarquer que pour la seconde ellipse on n'a pas besoin des tangentes, mais seulement de leurs points de contact, et comme les nouvelles tangentes qu'il faut mener sont parallèles aux premières, il s'ensuit qu'en menant les diamètres O'A', O'a', O'b', O'c'...., on aura dans leurs nouvelles intersections avec la courbe les points cherchés.

En prenant la partie APB, et construisant les deux courbes auxiliaires que l'on obtient, en considérant successivement les deux parties A'M'B', A'P'B', on aura encore deux nouvelles normales. Les tangentes qu'il faut tracer sur la partie APB s'obtiennent aisément à l'aide des premières, puisque leurs points de contact sont les extrémités de mêmes diamètres. On voit comment l'on parvient à construire les quatre normales, que le calcul nous a appris exister généralement pour deux courbes du second degré.

319.— Appliquons cette méthode à deux circonférences, qui

Digitized by Google

sont les deux courbes pour lesquelles les tangentes et normales sont les plus faciles à tracer.

En considérant les deux parties de courbe AMB, A'M'B', on obtient la courbe auxiliaire qui touche en M la première circonférence, en sorte que O'M'M est la première normale. Si on considère les deux arcs APB, A'M'B', on obtient la courbe $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$,... Fig. 196. qui n'est autre que la première, mais dont les points, sur chaque normale à la seconde circonférence, se sont rapprochés de cette dernière d'une longueur égale au diamètre de la circonférence MNP; d'après une propriété connue de la circonférence, la normale en M, est perpendiculaire à la tangente en P, d'où il suit que le point M de contact de la courbe auxiliaire avec la première circonférence va venir en P, ainsi M'P sera une seconde normale. On voit comment les quatre normales que donne la construction générale pour deux courbes du second degré, se réduisent à une seule dans la circonférence, qui est la ligne des centres.

Des tangentes communes à deux courbes.

320.— Considérons les deux courbes MNP, M'N'P', si ces deux courbes ont une ou plusieurs tangentes, l'une des courbes auxiliaires, telles que $\alpha\beta\gamma\delta$... coupera nécessairement M'N'P' en un certain point, car concevons une tangente commune, elle fera partie d'une des tangentes menées à la courbe MNP pour obtenir une des courbes déterminant les normales communes, le point de contact d'une des tangentes parallèles à la tangente commune menées à la courbe M'N'P', sera sur cette tangente, et alors la normale correspondante aura pour longueur zéro, c'est-à-dire que la courbe auxiliaire coupera la courbe M'N'P', au point de contact dont il s'agit. Réciproquement, supposons que la courbe $\alpha\beta\gamma\delta$, coupe M'N'P' en un point X, on va prouver qu'il est le point de contact d'une des tangentes communes; en effet, menons de ce point une tangente à la courbe MNP, soit Y; la ligne Y d'après la propriété Fig. 195. de la courbe $\alpha\beta\gamma\delta$... est perpendiculaire sur la normale en X à la courbe M'N'P' et comme ce dernier point est sur cette courbe, il s'ensuit qu'elle est tangente à la courbe M'N'P' en X, c'est-à-dire que c'est une tangente commune aux deux courbes. Donc les points où les courbes auxiliaires pour la construction des normales communes à deux autres courbes, telles que $\alpha\beta\delta\gamma$,...

Digitized by Google

coupent celle d'où partent les normales, sont les points de contact sur cette dernière des tangentes communes aux deux courbes. Ce procédé appliqué à deux courbes du second degré, termine ce qui a été dit, lorsqu'on a traité la détermination des tangentes communes aux courbes du second degré par le calcul.

Application à deux circonférences.

321.— Le tracé des tangentes et normales étant très-simple, lorsque les deux courbes sont des circonférences, on va appliquer le procédé ci-dessus décrit à ces deux courbes.

En construisant la courbe auxiliaire pour les deux arcs AMB, A'M'B', on obtient la ligne $\alpha\beta\gamma\delta$... coupant la circonférence M'N'P' aux deux points Z', U' qui déterminent bien, comme la construction le montre, les deux tangentes communes, ZZ', UU'. Fig. 196.

Si on considère les arcs APB, A'M'B', on obtient la courbe $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ qui coupe la seconde circonférence en X' et Y', alors on a les deux tangentes communes XX', YY'. Il est à remarquer que l'on ne doit appliquer cette construction que comme un cas particulier servant à faire comprendre la méthode générale, car lorsqu'on donne deux circonférences, il y a des procédés beaucoup plus simples pour déterminer leurs tangentes communes.

Digitized by Google

NOTE I.

Le retour des suites est une méthode par laquelle ayant une fonction développée suivant les puissances d'une variable, on peut obtenir le développement de la variable suivant les puissances de la fonction.

Ainsi soit $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$ (1) la fonction développée suivant les puissances de x, les quantités a, b, c, d, etc. étant connues, il faut réciproquement obtenir la valeur de x en fonction de y, c'est-à-dire qu'on ait

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots\ldots \qquad (2)$$

Pour résoudre la question, élevons successivement au carré, au cube....., les deux membres de l'équation (1), il vient

$$\begin{array}{l|l|l}
y^2 = a^2x^2 + 2abx^3 + b^2 & x^4 + 2bc & x^5 + \ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 2ac & \quad + 2ad & \\
y^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^4 + 3ab^2 & x^5 + \ldots\ldots & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 3a^2c & & \\
y^4 = a^4x^4 + 4a^3bx^5 + \ldots\ldots & & \\
y^5 = a^5x^5 + \ldots\ldots & &
\end{array}$$

Substituant les valeurs de y, y^2, y^3, y^4, y^5....., dans l'équation (2) et ordonnant, on a :

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
0 = Aa & x + Ab & x^2 + Ac & x^3 + Ad & x^4 + \ldots\ldots \\
-1 & \quad + Ba^2 & \quad + 2Bab & \quad + Bb^2 & \\
 & & \quad + Ca^3 & \quad + 2Bac & \\
 & & & \quad + 2Ca^2b & \\
 & & & \quad + Da^4 &
\end{array}$$

Cette équation devant être satisfaite quel que soit x, il faut que les coefficients des diverses puissances de x soient nuls, ce qui donne les égalités suivantes :

Digitized by Google

$$Aa - 1 = 0, \quad Ab + Ba^2 = 0, \quad Ac + 2Bab + Ca^3 = 0,$$
$$Ad + Bb^2 + 2Bac + 2ca^2b + Da^4 = 0;$$

d'où on tire successivement

$$A = \frac{1}{a}, \quad B = -\frac{Ab}{a^2} = -\frac{1}{a^3}b, \quad C = -\frac{Ac + 2Bab}{a^3} = \frac{2b^2 - ac}{a^3},$$
$$D = \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7}.$$

De sorte que le développement demandé est

$$x = \frac{1}{a}y - \frac{1}{a^3}by^2 + \frac{2b^2 - ac}{a}y^3 - \frac{5b^3 - 5abc + a^2d}{a^7}y^4 + \ldots$$

Si la fonction donnée avait la forme

$$y = m + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots\ldots$$

on ne pourrait pas développer x suivant les puissances de y, mais bien suivant les puissances de $y - m = z$. On le démontre en appliquant la méthode précédente à l'équation

$$y = m + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots\ldots$$

Application.

Considérons la fonction

$$A = h\left[1 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{2f}{h}\right)^2 - \frac{1}{5.8}\left(\frac{2f}{h}\right)^4 + \frac{1}{7.16}\left(\frac{2f}{h}\right)^6 - \frac{5}{9.128}\left(\frac{2f}{h}\right)^8 \ldots\right]$$

Pour obtenir $\frac{2f}{h}$ en fonction de A, il faut mettre cette égalité sous la forme :

$$\frac{A - h}{h} = \frac{1}{2.3}\left(\frac{2f}{h}\right)^2 - \frac{1}{5.8}\left(\frac{2f}{h}\right)^4 + \frac{1}{7.16}\left(\frac{2f}{h}\right)^6 - \frac{5}{9.128}\left(\frac{2f}{h}\right)^8.$$

Digitized by Google

Alors en posant $\frac{A-h}{h}=y$, $x=\left(\frac{2f}{h}\right)^2$, et désignant par les lettres a, b, c, d, les coefficients $\frac{1}{2.3}$, $-\frac{1}{5.8}$, $+\frac{1}{7.16}$, $-\frac{5}{9\times128}$, la fonction donnée se trouve ramenée à la forme :

$$y=ax+bx^2+cx^3+dx^4+\ldots.$$

La question à résoudre consiste à trouver la fonction

$$x=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots..$$

Au moyen des formules obtenues précédemment, on trouve :

$$A=+6,\quad B=+\frac{54}{10},\quad C=-\frac{324}{175},\quad D=+\frac{1242}{350},$$

de sorte qu'on a

$$x=by+\frac{54}{10}y^2-\frac{324}{175}y^3+\frac{1243}{350}y^4\ldots.$$

Remarquant que 6 est facteur commun à tous les coefficients, et mettant pour x et y, leur valeur respective, on a pour la fonction cherchée

$$\left(\frac{2f}{h}\right)^2=6\left[\frac{A-h}{h}+\frac{9}{10}\left(\frac{A-h}{h}\right)^2-\frac{207}{175}\left(\frac{a-h}{h}\right)^3+\ldots..\right]$$

Digitized by Google

NOTE II.

Discussion des courbes du second degré.

1.—L'équation générale des courbes du second ordre est

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

En supposant que le coefficient de y^2 ne soit pas nul, elle donne, par rapport à y,

$$y = -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4A^2}\left[x^2(B^2-4AC)+2x(BD-2AE)+D^2-4AF\right]}.$$

Pour simplifier, posons $a = -\frac{B}{2A}$, $b = -\frac{D}{2A}$, $B^2-4AC=n$, $BD-2AE=p$, $D^2-4AF=q$, il vient :

$$(2) \qquad y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q}.$$

A l'inspection de l'équation (2) on reconnaît que chaque ordonnée de la courbe se compose d'une partie commune $ax+b$. Cette expression rationnelle $ax+b$ n'est autre chose que l'ordonnée d'une droite dont $y=ax+b$ est l'équation; donc si on construit cette ligne, pour avoir des points de la courbe, il suffit de porter sur une ordonnée, à partir de cette droite au-dessus et au-dessous, une
Fig. 186. longueur égale à $\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q}$, x représentant l'abscisse du point pris en considération sur la ligne $y=ax+b$. Les deux points obtenus par cette construction appartiennent à la courbe représentée par l'équation (2). Soient Oy, Ox les axes des coordonnées, et AB la droite représentée par $y=ax+b$, considérons un point D de cette ligne pour avoir les deux points de la courbe situés sur l'or-

Digitized by Google

donnée CD; il faut, à partir du point D, prendre au-dessus et au-dessous de AB sur CD les longueurs DM, DM′ égales à l'expression $\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q}$, x étant ici égal à OC. En effet $CM = CD + DM = ax + b + \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q}$, $CM' = CD - DM' = ax + b - \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2+2px+q}$, expressions qui sont celles données par l'équation (2).

Concevons qu'on applique cette construction à tous les points de la droite AB pour lesquels x donne des valeurs réelles au radical, on obtiendra ainsi une suite de points qui forment la courbe que l'équation (1) représente. On voit que la ligne AB divise toutes les cordes parallèles à l'axe des ordonnées Oy en deux parties égales; une telle ligne, on le sait déjà, porte le nom de diamètre. Désormais on désignera par Y la quantité radicale qu'il faut porter au-dessus et au-dessous de AB.

Dans cette discussion on a pris les axes de coordonnées obliques, mais tout ce qu'on va dire s'applique au cas où ces axes seraient rectangulaires, et en général on doit préférer ces derniers dans les constructions géométriques, par la simplicité qu'ils apportent dans les expressions des distances des points, qui se trouvent alors données par des triangles rectangles.

L'équation (2) montre qu'à cause du double signe du radical il y a en général deux valeurs pour y, c'est-à-dire que, généralement parlant, il y a deux ordonnées qui correspondent à la même abscisse. On pourra calculer et construire ces ordonnées lorsque les valeurs de x rendront Y réel : si elles le rendent nul il n'y a qu'une valeur de Y, et par suite qu'une ordonnée; enfin si elles le rendent imaginaire il n'y en aura point du tout, et la courbe ne s'étendra pas au delà de l'abscisse considérée.

Ainsi, pour connaître l'étendue et les limites de la courbe parallèlement à l'axe des abscisses, il faut chercher l'étendue et les limites de x qui rendent la partie radicale réelle, nulle, ou imaginaire, ou bien encore qui rendent positive ou négative la quantité $nx^2+2px+q$ située sous ce radical. Or, en algèbre, on démontre que dans un polynôme $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots\ldots$ on peut toujours trouver pour x une valeur positive et une valeur négative, telles que toutes les valeurs positives et négatives plus grandes donnent à ce

Digitized by Google

polynôme des valeurs de même signe que le premier terme, valeurs allant en augmentant jusqu'à l'infini si on fait croître x jusqu'à cette limite. Il suit de là qu'à partir de certaines valeurs attribuées à x, positives et négatives, la quantité $nx^2+2px+q$ prendra des valeurs croissantes jusqu'à l'infini de même signe que son premier terme nx^2. Comme le facteur x^2 est toujours positif par lui-même, ce signe sera celui de n, c'est-à-dire de B^2-4AC; d'où il résulte les conséquences suivantes :

Lorsque B^2-4AC est négatif, il y a des valeurs pour x au delà desquelles l'ordonnée Y est imaginaire, quel que soit du reste le signe attribué à x; d'un autre côté l'équation (2) montre que pour les valeurs de x entre lesquelles Y est réel, l'ordonnée y est finie.

Fig. 10. Donc la courbe est limitée tant dans le sens des x positifs que négatifs, puis au-dessus et au-dessous du diamètre, c'est-à-dire qu'elle est limitée dans tous les sens. Cette courbe est celle désignée sous le nom d'*ellipse*.

Lorsque $B^2-4AC=0$, l'ordonnée Y perd son premier terme. Alors si on suppose la quantité p positive, on pourra donner à x des valeurs aussi grandes qu'on le voudra; Y sera toujours réel. Mais si on donne à x des valeurs négatives, il arrivera que si on dépasse certaines valeurs Y deviendra imaginaire, la courbe est donc limitée dans le sens des x négatifs. Ce sera le contraire si la quantité p est négative. Il résulte de là que dans les deux cas,

Fig. 9. $p>0$, ou $p<0$, la courbe s'étend jusqu'à l'infini au-dessus et au-dessous du diamètre AB, mais elle n'est illimitée que d'un seul côté de l'origine des axes. Cette courbe se nomme *parabole*.

Lorsque B^2-4AC est positif, il y a des valeurs de x positives et

Fig. 8. négatives à partir desquelles Y est toujours réel. Comme cette ordonnée peut croître jusqu'à l'infini, l'équation (1) représente une courbe indéfinie dans le sens des x tant positifs que négatifs, tant au-dessus qu'au-dessous du diamètre AB, ou, en d'autres termes, qu'elle est illimitée dans quatre directions. Cette courbe se nomme *hyperbole*.

Supposons maintenant le coefficient $A=0$, l'équation (1) résolue par rapport à x donne

$$x=-\frac{B}{2C}y-\frac{E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{B^2y^2+2y(BE-2CD)+E^2-4CF}.$$

On voit que si B n'est pas nul, B^2y^2 est toujours positif, alors si

Digitized by Google

on fait les mêmes raisonnements que ci-dessus à cela près qu'on mette y là où il y avait x, on reconnaîtra que la courbe est illimitée dans quatre directions ; pour ce motif on peut la placer dans le genre des hyperboles, auquel du reste elle appartient puisque B^2-4AC, qui se réduit dans l'hypothèse où nous sommes à B^2, est une quantité essentiellement positive.

Si B est nul, la quantité sous le radical n'est plus que du premier degré, et en répétant ce qu'on a dit dans le cas de $B^2-4AC=0$, on reconnaîtrait facilement que la courbe doit être rangée parmi les paraboles, genre dont elle fait partie puisque le caractère analytique $B^2-4AC=0$ existe, car $B=0$, $A=0$.

Considérons la dernière hypothèse $B=0$ en même temps que $C=0$.

L'équation (1) résolue par rapport à y donne

$$(3) \qquad y=-\frac{Ex+F}{Bx+D} \quad \text{ou} \quad y=-\frac{E+\frac{F}{x}}{B+\frac{D}{x}}.$$

L'équation (3) montre que y est réel quel que soit x, et ensuite que si on fait $x=\pm\infty$ on a $y=-\frac{E}{B}$; donc si on prend sur l'axe Oy à partir du point O une longueur $OD=-\frac{E}{B}$ et qu'on mène par ce point MM' parallèle à Ox, cette ligne rencontrera la courbe à l'infini, ainsi l'équation (3) donne une courbe qui s'étend jusqu'à l'infini tant du côté DM que du côté M'. Fig. 187.

Si on résout la même équation par rapport à x, on a :

$$x=-\frac{Dy+F}{By+E} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{D+\frac{F}{y}}{B+\frac{E}{y}}.$$

Sous cette forme, on voit que la courbe est rencontrée par la droite $x=-\frac{D}{B}$ pour $y=\pm\infty$, de sorte que si sur Ox on prend $OG=-\frac{D}{B}$ et qu'on mène par ce point la ligne NN' parallèle à Oy,

Digitized by Google

la courbe rencontrera NN' à l'infini tant du côté de GN que du côté de GN'. De cette discussion il résulte que la courbe représentée par l'équation (3) a quatre branches indéfinies; pour ce motif on la place parmi les hyperboles; du reste si on examine le caractère analytique B^2-4AC on voit qu'il est essentiellement positif puisqu'il se réduit à B^2, A et C étant tous deux nuls.

En résolvant l'équation générale par rapport à x, au lieu de la résoudre par rapport à y, on trouverait pour l'axe des y des indications analogues, il est même facile de s'assurer qu'elles rentreraient dans les précédentes, car l'équation

$$(4) \qquad x = -\frac{B}{2C}y - \frac{E}{2C} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2C}\sqrt{y^2(B^2-4AC)+2y(BE-2CD)+E^2-4CF}$$

montre que le coefficient de y^2 sous le radical est (B^2-4AC); et selon qu'il sera négatif, nul ou positif, la courbe sera limitée dans le sens des y, ou elle s'étendra indéfiniment dans un seul sens, parallèment à cet axe, ou enfin elle s'étendra indéfiniment dans les deux sens, du côté des y positifs et négatifs.

On est ainsi conduit à partager les courbes du second ordre, d'après l'étendue et la direction de leurs branches, en trois genres distincts, savoir :

Courbes limitées dans tous les sens. (*Ellipse.*)	$B^2-4AC<0.$	Caractères.
Courbes indéfinies dans un sens, et limitées dans un sens opposé. (*Parabole.*)	$B^2-4AC=0.$	
Courbes indéfinies dans tous les sens. (*Hyperbole.*)	$B^2-4AC>0.$	

2. — Premier genre.

Courbes limitées dans tous les sens.

Caractère $B^2-4AC<0.$

Reprenons l'équation (2)

Digitized by Google

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + 2px + q},$$

puisque n est supposé négatif, remplaçons-le par $-\delta^2$, il vient

$$y = ax + b \pm \frac{\delta}{2A}\sqrt{-\left(x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2}\right)} = ax + b \pm Y.$$

Supposons que la ligne $y = ax + b$ qu'on sait être un diamètre, soit AB. Cherchons les points où la courbe le coupe. Ces points sont tels que leurs abscisses rendent $Y = 0$. C'est-à-dire qu'elles sont données par l'équation

$$x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2} = 0.$$

Désignons par x', x'' ses racines, trois cas peuvent se présenter; si elles sont réelles elles peuvent être inégales ou égales, ou enfin elles peuvent être imaginaires; une seule ne peut pas être imaginaire, puisqu'on démontre en algèbre que le nombre des racines imaginaires d'une équation est toujours pair. On va examiner ces trois cas l'un après l'autre.

1er *Cas.* x', x'' étant réelles et inégales, la courbe coupe AB en deux points. Admettons que ces deux racines soient positives, et que $x'' > x'$. Pour déterminer les points placés sur le diamètre, prenons $OE = x'$, $OE' = x''$, par les points E, E' menons EL, E'L' parallèlement à Oy, les points H, H' où AB est coupé sont les points cherchés.

Pour se rendre compte plus aisément de la marche de l'ordonnée Y à mesure que l'on fait passer x par tous les états de grandeur, décomposons le polynôme $x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2}$ en deux facteurs, Fig. 10.

x', x'' étant les racines de l'équation $x^2 - \frac{2p}{\delta^2}x - \frac{q}{\delta^2} = 0$, on a

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{(x - x')(x'' - x)}.$$

Du point O au point E, x est moindre que x' et à fortiori

Digitized by Google

moindre que x'', donc $x - x' < 0$ et $x'' - x > 0$, c'est-à-dire que Y est imaginaire, ainsi il n'y a pas de point de la courbe compris entre les parallèles Oy, EL. Si on donne à x une valeur quelconque comprise entre x' et x'', on a $x - x' > 0$ et $x'' - x > 0$, alors Y est constamment réel, ainsi la courbe a des points entre les parallèles E'L, EL'. Faisons croître x au delà de x'', on a $x - x' > 0$ et $x'' - x < 0$; donc Y est imaginaire, ainsi au delà de E'L', il n'y a pas de points appartenant à la courbe. De là il résulte que du côté des x positifs la courbe est tout entière entre les lignes EL, E'L'. Donnons à x des valeurs négatives; les deux facteurs deviennent $-x - x'$, $x'' + x$, ce qui montre que quelle que soit la valeur numérique donnée à x, Y est imaginaire. Ainsi donc la courbe est tout entière comprise entre les parallèles EL, E'L'.

Maintenant que nous connaissons les limites de l'ellipse dans le sens des abscisses, il nous faut connaître ses limites dans le sens des ordonnées, ou, ce qui revient au même, il faut trouver la valeur maximum de Y.

Remarquons que la somme des deux facteurs qui se trouvent sous le radical est constante et égale à $x'' - x'$, donc leur produit sera un maximum lorsque chacun d'eux sera égal à la demi-somme de $x - x'$ et $x'' - x$, en conséquence si on pose

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{2},$$

l'abscisse résultante x correspond à l'ordonnée maximum Y dont la valeur est $Y = \frac{\delta}{4A}(x'' - x')$. Mais l'équation $x - x' = \frac{x'' - x'}{2}$ montre que l'extrémité de l'abscisse x, le point K, est le milieu de EE', car on a $x - x' = EK$, et $x'' - x' = EE'$. Si par le point K on mène la ligne KQ parallèle à EL, et qu'à partir du point O' où elle coupe AB, on prenne $O'Q_1 = O'Q_1' = \frac{\delta}{4A}(x'' - x')$, on a en Q_1, Q_1' les points les plus éloignés du diamètre AB. De sorte que si par les points Q, Q', on mène des parallèles au diamètre AB, le parallélogramme MNN'M', qu'on forme ainsi, renferme entièrement l'ellipse; plus tard on va voir que ses côtés sont tangents à la courbe.

Digitized by Google

Le point O′ est le milieu de HH′ puisque $EK = \frac{1}{2} EE'$, il est en outre le milieu de QQ′, on va maintenant prouver qu'il est le centre de la courbe.

A partir du point K entre E et E′, prenons $KF = KF' = \gamma$, alors $OF = OK - KF = \frac{x'' + x'}{2} - \gamma$ et $OF' = \frac{x'' + x'}{2} + \gamma$. Dans l'ordonnée Y remplaçons x successivement par OF et OF′, on a :

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{\left(\gamma + \frac{x'' + x'}{2} - x'\right)\left(x'' - \gamma - \frac{x'' + x'}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\delta}{2A}\sqrt{\left(\gamma + \frac{x'' - x'}{2}\right)\left(\frac{x'' - x'}{2} - \gamma\right)},$$

$$Y' = \frac{\delta}{2A}\sqrt{\left(\frac{x'' + x'}{2} - \gamma - x'\right)\left(x'' + \gamma - \frac{x'' + x'}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\delta}{2A}\sqrt{\left(\frac{x'' - x'}{2} - \gamma\right)\left(\frac{x'' + x'}{2} + \gamma\right)}.$$

On voit que les deux valeurs de Y et Y′ sont égales, donc si par les points F, F′ on mène des parallèles à EL les points G_1, G'_1, G_2, G'_2 qu'on obtient pour la courbe sont tels que $IG_1 = I'G_2$, et par suite $G_1G'_1 = G'_2G'_2$; il résulte de là que la figure $G_1G_2G'_2G'_1$ est un parallélogramme dont O′ est le centre de figure, puisque les lignes KQ'_1, AB sont parallèles à ses côtés et qu'elles passent par leurs milieux. Donc si on joint les sommets opposés on a deux droites $G_1G'_2$, $G'_2G'_1$ qui passent par le point O′, et qui ont ce point pour milieu. Le même raisonnement s'appliquerait à toute autre valeur de γ; or, si on fait varier γ depuis 0 jusqu'à $\frac{x'' - x'}{2}$, on aura évidemment à l'aide de OF tous les points de la courbe compris entre EL et KQ'_1, puis ceux entre KQ'_1 et E′L′. On conclut de là que toute droite passant par le point O′ a ce point pour milieu, c'est-à-dire que le point O′ est le centre de la courbe.

Le point G_1 étant quelconque, on déduit de l'existence du parallélogramme $G_1G'_1G'_2G_2$ que toute corde parallèle au diamètre AB est divisée par KQ'_1 en deux parties égales, ainsi la ligne KQ'_1 est

Digitized by Google

un second diamètre qui divise les cordes parallèles au premier en deux parties égales, et réciproquement le diamètre AB divise en deux parties égales les cordes parallèles à KQ'_1. Deux tels diamètres AB, KQ'_1, sont dits *conjugués*.

La reconnaissance des deux diamètres AB, KQ_1, qui sont conjugués, est d'un grand secours pour la construction de l'ellipse puisqu'à l'aide d'une seule valeur de Y on obtient quatre points.

Si on fait croître γ, les valeurs de Y vont en décroissant, c'est-à-dire que les points G_1, G'_1, vont en se rapprochant l'un de l'autre, de même que G_2, G'_2; à la limite $\gamma = \frac{x'' - x'}{2}$, les deux valeurs de Y sont égales à zéro, alors les deux points G_1, G'_1 se sont réunis en H, ainsi que G'_2 et G_2 en H', les droites FG'_1, $F'G'_2$ sont devenues EL, E'L', qui sont alors tangentes puisqu'elles sont la limite des sécantes parallèles FG'_1, $F'G'_2$.

On prouverait de même que $G'_1G'_2$, G_1G_2 ont pour limite les lignes MN et M'N', et que par suite ces dernières sont tangentes en Q_1 et Q'_1. Donc l'ellipse est inscrite dans le parallélogramme MNN'M'.

On a trouvé que le point O' avait pour coordonnées

$$x = \frac{x'' - x'}{2}, \quad y = ax + b + \frac{\delta}{4A}(x'' + x'),$$

si à la place de a, b, x, x', x'', on met leurs valeurs en fonction des coefficients de l'équation (1), on trouve :

$$x = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad y = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}.$$

Telles sont les équations du centre de l'ellipse.

En construisant la courbe par points on trouve qu'elle a la forme de la courbe $HQ'_1H'Q_1$, qui est concave vers le diamètre AB; elle ne peut pas avoir une autre forme sans quoi une droite pourrait la couper en plus de deux points, ce qui ne peut arriver à une courbe du second degré.

Si au lieu de résoudre l'équation générale par rapport à y, on l'eût résolue par rapport à x, on serait arrivé aux mêmes conclusions.

Reprenons l'équation $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$;

Digitized by Google

maintenant que nous connaissons la forme de la courbe qu'elle représente, on va chercher les points où elle coupe les axes de coordonnées.

Pour avoir les points où elle coupe l'axe des x, il faut faire $y=0$ dans l'équation proposée, ce qui donne $Cx^2+Ex+F=0$. Les racines de cette équation sont les abscisses des points d'intersection, et suivant qu'elles sont réelles inégales, ou égales, ou imaginaires, la courbe coupe l'axe des x en deux points, ou lui est tangente, ou ne la rencontre pas.

De même, faisant $x=0$, on a $Ay^2+Dy+F=0$, équation dont les racines sont les ordonnées des points où l'axe des y coupe l'ellipse.

On voit que sa position relativement aux axes de coordonnées dépend des valeurs particulières des coefficients A, B; et, d'après ce qu'on vient de dire, on peut facilement la découvrir dans chaque cas particulier. Dans le but de ne laisser aucune incertitude à cet égard, on a dressé ci-dessous le tableau de ces diverses conditions.

Conditions géométriques.	*Conditions entre les coefficients.*	
Réalité des racines x', x''.	$(BD-2AE)^2-(D^2-4AF)(B^2-4AC)>0$.	(1)
Deux points d'intersection avec l'axe des x.	$E^2-4CF>0$.	(2)
Un point de contact avec l'axe des x.	$E^2-4CF=0$.	(3)
Aucun point d'intersection avec l'axe des x.	$E^2-4CF<0$.	(4)
Deux points d'intersection avec l'axe des y.	$D^2-4AF>0$.	(5)
Un point de contact avec l'axe des y.	$D^2-4AF=0$.	(6)
Aucun point d'intersection avec l'axe des y.	$D^2-4AF<0$.	(7)

Lorsqu'on veut discuter une équation dans laquelle les coefficients A, B, C.... sont numériques, on doit se garder de chercher à rappeler dans sa mémoire les conditions précédentes, pour cher-

Digitized by Google

cher ensuite à les appliquer à l'exemple proposé ; mais il faut reprendre le raisonnement général et la marche directe de la discussion. On est ainsi conduit à ces résultats immédiatement et sans aucun effort.

2e *cas*. Si les deux racines x', x'' sont réelles et égales, l'ordonnée Y devient :

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{-(x-x')^2} = \frac{\delta(x-x')}{2A}\sqrt{-1}.$$

On voit que la seule valeur de x pour laquelle Y soit réel est $x = x'$; l'ellipse se réduit alors à un point dont les coordonnées sont $x = x'$, $y = ax' + b$.

3e *cas*. Si les deux racines x', x'' sont imaginaires, on sait que, quelle que soit la valeur qu'on attribue à x, le polynôme $nx^2 + 2px + q$ qui se trouve sous le radical ne peut pas changer de signe. D'un autre côté, il est prouvé que x peut avoir une valeur qui donne à ce polynôme le signe de son premier terme, c'est-à-dire le signe *moins*; il s'ensuit que $nx^2 + 2px + q$ est, dans le cas qui nous occupe, toujours négatif ; donc Y est imaginaire. Par conséquent il n'existe aucun point dont les coordonnées satisfassent à l'équation (1). L'équation est dite alors *impossible*, et l'ellipse *imaginaire*.

3. — Deuxième Genre.

Courbes limitées dans un sens, et indéfinies dans l'autre.

Caractère $B^2 - 4AC = 0$.

Lorsque $B^2 - 4AC = 0$, l'ordonnée Y devient $Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{2px+q}$. Si p, q sont positifs, pour une valeur quelconque de x positive Y est réel, en sorte que Y varie depuis $\frac{\delta}{2A}\sqrt{q}$ jusqu'à l'infini ;

Fig. 9. donnons à x des valeurs négatives, pour cela changeons x en $-z$ et donnons ensuite à z des valeurs positives, il vient :

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{-(2pz-q)}.$$

Ainsi tant que z est moindre que $\frac{q}{2p}$, Y est réel, et plus z va en

Digitized by Google

convergeant vers $\frac{q}{2p}$, plus Y diminue; enfin pour $z=\frac{q}{2p}$, Y est zéro; alors la courbe coupe le diamètre AB en H, et la ligne PD parallèle à Oy pour laquelle $OP=\frac{q}{2p}$, est une tangente à la parabole. On voit qu'à droite de PD la courbe va en s'étendant jusqu'à l'infini du côté des x positifs, et que les deux branches vont en s'éloignant jusqu'à l'infini du diamètre AB.

Si p au lieu d'être positif était négatif, la courbe aurait une forme analogue à la précédente, à cela près qu'elle s'étendrait jusqu'à l'infini dans le sens des x négatifs, c'est-à-dire qu'elle aurait une position inverse à celle de la première.

Supposons $p=0$, l'équation (1) se réduit à $y=ax+b\pm\frac{\delta}{2A}\sqrt{q}$, c'est-à-dire que dans ce cas la courbe se change en deux lignes parallèles au diamètre $y=ax+b$, (AB) à égale distance de cette ligne. Enfin si $p=0$, $q<0$. Y est imaginaire, et alors il n'y a plus de parabole; en outre si $p=0$, q est aussi nul, la courbe se réduit à son diamètre $y=ax+b$.

Supposons $A=0$, $B=0$, l'équation (1) devient :

$$Cx^2+Dy+Ex+F=0.$$

En la résolvant par rapport à x, on a :

$$x=-\frac{E}{2C}\pm\sqrt{\frac{1}{4C^2}(-4CDy+E^2-4CF)}.$$

On voit qu'ici l'équation du diamètre est $x=-\frac{E}{2C}$, c'est-à-dire une parallèle à l'axe des y; en appliquant à y les mêmes raisonnements qu'on vient d'appliquer à x, on trouverait une courbe analogue à la précédente. Du reste son caractère analytique est bien encore $B^2-4AC=0$, puisqu'on a $B=0$, $A=0$.

Si on eût résolu l'équation par rapport à y, on aurait eu :

$$y=-\frac{C}{D}\left(x^2+\frac{E}{C}x+\frac{F}{C}\right),$$

valeur qu'il est facile de discuter.

Digitized by Google

Quant à la position particulière de cette courbe et à sa situation par rapport aux axes, elle dépend uniquement des valeurs des coefficients A, B, C, D..... ; on la découvrira en suivant une marche analogue à celle suivie pour l'ellipse. Du reste il suffit, pour former un tableau semblable au précédent pour la parabole, de faire entrer dans chaque condition l'égalité $B^2 - 4AC = 0$. D'après cela on a :

Conditions géométriques.	*Conditions entre les coefficients.*
Courbes limitées dans un sens, et illimitées dans un sens opposé.	$B^2 - 4AC = 0.$
Deux points d'intersection avec l'axe des x.	$\overline{AE}^2 - B^2F > 0.$
Un point de contact avec l'axe des x.	$\overline{AE}^2 - B^2F = 0.$
Aucun point d'intersection avec l'axe des x.	$\overline{AE}^2 - B^2F < 0.$
Deux points d'intersection avec l'axe des y.	$\overline{CD}^2 - B^2F > 0.$
Un point de contact avec l'axe des y.	$\overline{CD}^2 - B^2F = 0.$
Aucun point d'intersection avec l'axe des y.	$\overline{CD}^2 - B^2F < 0.$

Il résulte de cette discussion que les courbes comprises dans le second genre pour lequel $B^2 - 4AC = 0$ sont en général illimitées dans un seul sens comme la parabole, mais peuvent cependan donner, comme variétés, deux droites parallèles à égale distance du diamètre, ou une seule droite, ou deux droites imaginaires.

4 — Troisième Genre.

Courbes illimitées dans tous les sens.

Caractère $B^2 - 4AC > 0$.

La quantité n etant positive, l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme :

Digitized by Google

$$y = ax + b \pm \frac{\delta}{2A}\sqrt{x^2 + \frac{2p}{\delta^2}x + \frac{q}{\delta^2}}.$$

Pour obtenir les points où le diamètre la rencontre, il faut poser $x^2 + \frac{2p}{\delta^2}x + \frac{q}{\delta^2} = 0$. Les racines de cette équation seront les abscisses des points demandés. Il y a trois cas à examiner, savoir : celui où elles sont réelles et inégales, réelles et égales, et enfin celui où elles sont imaginaires.

1er *cas*. x', x'' étant des quantités réelles et inégales, l'hyperbole coupera le diamètre dont $y = ax + b$ est l'équation, en deux points H, H′ ayant pour abscisses les racines x', x''. Supposons x', x'' positifs et $x'' > x'$. Pour se rendre compte plus exactement de la marche de l'ordonnée Y, décomposons la quantité sous le radical en deux facteurs, il vient :

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{(x - x')(x - x'')}.$$

Faisons croître x depuis zéro jusqu'à l'infini et examinons les valeurs que prend Y. Pour $x = 0$, $Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{x'x''}$, ce qui donne les deux points G, G′; nous voyons que tant que x est moindre que x', les deux facteurs $x - x'$, $x - x''$ sont négatifs, en conséquence Y est réel, en outre que x croissant les facteurs $x - x'$, $x - x''$ vont en diminuant, donc Y décroît, c'est-à-dire que la courbe se rapproche de son diamètre AB. Pour $x = x'$, $Y = 0$, et on a le point H, l'ordonnée CH étant la limite des sécantes parallèles à Oy est une tangente à la courbe au point H. Entre x' et x'', $x - x'$ est positif et $x - x'' < 0$, donc Y est imaginaire, ce qui veut dire qu'entre les lignes CH, C′H′ il n'y a point de courbe; pour $x = x''$, Y est nul, ainsi H′ est le second point où le diamètre AB rencontre l'hyperbole. Fig. 8.

A partir de $x = x''$, les deux facteurs $x - x'$, $x - x''$ deviennent positifs, en outre chacun d'eux va en croissant jusqu'à l'infini, donc la courbe s'écarte de plus en plus de son diamètre à mesure que x croît, enfin pour $x = \infty$, Y est infini, ainsi cette branche de l'hyperbole est infinie dans deux directions, au-dessus et au-dessous de AB.

Digitized by Google

Donnons maintenant à x des valeurs négatives, pour cela à la place de x mettons $-x$, et affectons à x, dans le résultat, des valeurs positives.

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{(x+x')(x+x'')}.$$

On voit que si on fait croître x, Y ira en croissant, et pour $x=\infty$, $Y=\infty$. Ainsi la seconde branche de l'hyperbole va en s'écartant de plus en plus du diamètre AB, et à la limite elle en est à une distance infinie.

La discussion montre que l'hyperbole se compose de deux branches ayant la forme que présente la figure (8).

Maintenant on va chercher son centre et le diamètre conjugué de AB, cette partie de la discussion intéresse à un haut degré la construction de la courbe.

Si par le point situé sur l'axe des x, dont $x=\frac{x''+x'}{2}$ est l'abscisse, on mène une parallèle à l'axe Oy, cette ligne coupe le diamètre AB en O', point qu'on va prouver être le centre de l'hyperbole.

En effet, donnons à x les deux valeurs

$$x = \frac{x''+x'}{2} + \frac{x''-x'}{2} + \gamma = OE + EC' + C'F = OF',$$

$$x = \frac{x''+x'}{2} - \frac{x''-x'}{2} - \gamma = OE - EC - \gamma = OF.$$

On va voir que les deux ordonnées Y sont égales, effectuant les calculs, il vient :

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{(x''-x'+\gamma)(x''+\gamma-x')} = \frac{\delta}{2A}\sqrt{\gamma(x''+\gamma-x')},$$

$$Y' = \frac{\delta}{2A}\sqrt{(x'-\gamma-x')(x'-\gamma-x'')} = \frac{\delta}{2A}\sqrt{\gamma(x''+\gamma-x')}.$$

On voit que Y, Y' ont même valeur, donc les ordonnées Y, KN, KN', K'M, K'M' sont égales; en conséquence si on forme le quadrilatère MM'N'N, on obtient un parallélogramme, puisque deux

Digitized by Google

côtés opposés NN', MM' sont égaux et parallèles. Le point E étant le milieu de FF', le point O' est aussi celui de KK', donc la ligne O'E divise en deux parties les cordes parallèles NM, N'M', et comme les points N, M sont pris quelconques, il s'ensuit que les deux lignes AB, OE sont telles que l'une divise les cordes parallèles à l'autre en deux parties égales et réciproquement, donc AB, OE sont deux diamètres conjugués.

Si on joint les sommets opposés du parallélogramme NMM'N', les lignes NM', N'M passeront au point O', qui est l'intersection de deux lignes parallèles à ses côtés, passant par leurs milieux; et en outre elles sont évidemment mises par ce point en deux parties égales. Donc le point O' est le centre de l'hyperbole, puisque les lignes NM', NM' étant deux lignes quelconques passant par ce point, mais non indépendantes l'une de l'autre, sont divisées par lui en deux parties égales. Les coordonnées du centre sont

$$x=\frac{x''+x'}{2}\pm\frac{2AE-BD}{B^2-4AC},\ y=a\,\frac{x''+x'}{2}+b=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}.$$

D'après le mode de détermination des points M, N, on voit qu'à l'aide d'une seule valeur de Y on peut déterminer quatre points de l'hyperbole; ainsi il est important dans la discussion d'une équation de ce genre de déterminer les deux diamètres conjugués AB, O'E.

2° *cas*. Si les racines x', x'' sont égales, la valeur de l'ordonnée totale y devient :

$$y=ax+b\pm\frac{\delta}{2A}(x-x').$$

On reconnaît que cette équation représente deux lignes droites MN, M'N' passant au point O', dont les coordonnées sont $x=x'$, $y=ax'+b$; la ligne $y=ax+b$ ou AB, jouit encore de la propriété d'être diamètre par rapport aux deux lignes MN, M'N', puis en outre elle est la bissectrice de l'angle que font ces deux lignes. Fig. 190.

3° *cas*. Lorsque les racines x', x'' sont imaginaires, le diamètre AB ne coupe pas la courbe. Le trinôme placé sous le radical étant toujours positif, il s'ensuit que chaque valeur de x donnera une valeur réelle à Y; ainsi la courbe s'étendra en dessus et en dessous de la ligne AB jusqu'à l'infini. Dans ce cas elle est encore composée de deux branches indéfinies séparées par le diamètre, chacune d'elles Fig. 189.

Digitized by Google

est convexe vers le diamètre, en sorte que la courbe est représentée par la figure 189.

Nous allons maintenant nous proposer de trouver les points les plus rapprochés du diamètre AB. Dans ce but mettons Y sous la forme :

$$Y = \frac{\delta}{2A}\sqrt{\left(x+\frac{p}{\delta^2}\right)^2+\left(\frac{q}{\delta^2}-\frac{p^2}{\delta^4}\right)}.$$

La quantité $\frac{q}{\delta^2}-\frac{p^2}{\delta^4}$ est essentiellement positive, sans quoi l'équation $x^2+\frac{2p}{\delta^2}+\frac{q}{\delta^2}=0$ aurait deux racines réelles, ce qui est contre l'hypothèse. Il suit de cette observation que la valeur minimum Y correspond à celle de x qui rend $x+\frac{p}{\delta^2}=0$, c'est-à-dire à $x=-\frac{p}{\delta^2}$.

L'ordonnée correspondante est $Y=\frac{1}{2A}\sqrt{q-\frac{p^2}{\delta^2}}$, alors si on prend à partir du point O, $OM=-\frac{p}{\delta^2}$, puis ensuite qu'on tire MP parallèle à Oy, le point O' où elle coupe AB est le centre de l'hyperbole; prenant $O'P=O'P'=\frac{1}{2A}\sqrt{q-\frac{p^2}{\delta^2}}$, on a aux points P, P' les points les plus rapprochés du diamètre AB. Les lignes PQ, P'Q' menées parallèlement à AB sont tangentes à la courbe, en sorte qu'elles laissent chaque branche toute d'un de leurs côtés. La démonstration qu'il faut employer pour prouver que PP' est un diamètre, et O' le centre de l'hyperbole est analogue à celle employée antérieurement dans la discussion de cette courbe.

Dans tout ce qui a été dit sur le troisième genre de courbe, on n'a supposé aucun coefficient nul, examinons quelle est la courbe fournie par l'équation $Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$, qui n'est autre que l'équation (1) dans laquelle $A=0$. Il vient, en la résolvant par rapport à y,

$$y=-\frac{Cx^2+Dy+F}{Bx+D},$$

Digitized by Google

Effectuant la division autant que possible et désignant par c, d les coefficients du quotient et par f le reste, on a :

$$y = cx + d + \frac{f}{Bx + D}$$

$c = -\frac{C}{B}$, $d = \frac{CD}{B^2}$, $f = -\frac{\overline{CD}^2}{B^2} - F$. Construisons la droite $y = cx + d$, soit SS′, il est clair que pour avoir un point de la courbe, il faudra porter sur chaque ordonnée une quantité égale à $\frac{f}{Bx+D}$, en dessus de SS′ lorsque $\frac{f}{Bx+D}$ sera positif, et en dessous quand elle sera négative, car dans la première hypothèse l'ordonnée doit être augmentée de $\frac{f}{Bx+D}$ et dans la seconde diminuée de la même quantité. Posons pour abréger $V = \frac{f}{Bx+D}$, et supposons les quantités f, B, D positives. Il faut chercher la marche que suivent les valeurs de V lorsqu'on fait passer x par tous les états de grandeur. Fig. 188.

Pour $x = 0$, $V = \frac{f}{D}$, alors prenant sur l'axe Oy au-dessus de SS′ une longueur LD égale à $\frac{f}{D}$, on aura dans le point D un point de la courbe. Si on fait croître x jusqu'à l'infini, $\frac{f}{Bx+D}$ sera toujours positif, ce qui montre que la courbe est toujours située au-dessus de SS′; mais à mesure que x croît, V diminue, donc la courbe va en se rapprochant de la ligne SS′, pour $x = \infty$, $V = 0$. Ainsi à l'infini la courbe rencontre SS′. On voit donc que SS′ est une ligne telle que la courbe va en s'en rapprochant indéfiniment et qu'elle ne la rencontre qu'à l'infini, une telle droite se nomme *asymptote*. Les valeurs de x comprises entre zéro et l'infini donnent la branche de courbe DE.

Pour ramener la substitution des valeurs négatives à celles des valeurs positives, mettons à la place de x la quantité $-x$, il vient :

$$V = \frac{f}{D - Bx}.$$

Digitized by Google

Si, à partir de zéro, on donne une suite de valeurs moindres que $\frac{D}{B}$, $\frac{f}{D-Bx}$ sera positif, et la courbe sera toujours placée au-dessus de SS'. On voit qu'à mesure que x croît, $D-Bx$ diminue; donc V croît, ainsi la branche de courbe qu'on construit, et qui est le prolongement de l'arc DE, va en s'éloignant de plus en plus de SS'. Pour $x=\frac{D}{B}$, V est infini, ce qui montre que la parallèle à l'axe des y pour laquelle $OH=\frac{D}{B}$ est une ligne dont la courbe se rapproche indéfiniment sans jamais la rencontrer, c'est-à-dire qu'elle est une asymptote.

Si on donne à x une valeur plus grande que $\frac{D}{B}$, V devient négatif; alors il faut porter sa valeur au-dessous de SS'. Soit K un point de la courbe pour lequel son abscisse OF est plus grande que OH. Concevons qu'on fasse décroître x depuis OF jusqu'à OH, la quantité V sera toujours négative, mais ira en croissant, et enfin pour $x=\frac{D}{B}=OH$, on aura $V=-\infty$. Ainsi la droite HR, est asymptote à la partie KM de la branche inférieure. Si on donne à x des valeurs croissant à partir de OF, la quantité V sera toujours négative, mais ira en diminuant; ainsi la courbe va en se rapprochant de la partie inférieure de la ligne SS'; enfin pour $x=\infty$, $V=0$, en ce point la courbe rencontre SS'; on reconnaît donc qu'au-dessous de SS' la partie KN de la seconde branche a SS' pour asymptote.

De cette discussion il résulte que SS', RR' sont deux asymptotes à l'hyperbole, dont l'une est parallèle à l'axe des y.

Par un raisonnement semblable on eût fait voir que si le terme en x^2 n'eût pas existé, l'une des asymptotes eût été une parallèle à l'axe des x.

On a admis que dans la valeur de y la division ne pouvait pas se faire exactement; supposons qu'il en soit autrement, c'est-à-dire que $f=0$; alors on a :

$$y=-\frac{Cx^2+Ex+F}{Bx+D}=cx+d,$$

Digitized by Google

d'où $$(cx+d)(Bx+d)=-(Cx^2+Ex+F).$$

Mais l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme :

$$y(Bx+D)=-(Cx^2+Ex+F);$$

donc $$y(Bx+D)=(cx+d)(Bx+D)$$

ou $$(Bx+D)(y-cx-d)=0.$$

La dernière équation peut être satisfaite de deux manières, en faisant $Bx+D=0$ ou $y-cx-d=0$; c'est-à-dire que l'équation $Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$ représente deux droites, dont l'une est parallèle à l'axe des y, et l'autre oblique sur cette ligne. De semblables conclusions auraient lieu si le terme en x^2 eût manqué et que la division qu'on eût été obligé d'effectuer se fût faite exactement.

Si l'équation générale manque des termes en y^2 et x^2, sa forme est

$$Bxy+Dy+Ex+F=0.$$

On reconnaîtrait par les mêmes raisonnements que ci-dessus que la courbe a deux asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.

On conclut généralement que, toutes les fois qu'une équation du second degré représente une hyperbole, si elle manque d'un terme du second degré, le rectangle des variables existant, la courbe a une asymptote parallèle à l'axe sur lequel se compte le carré de la coordonnée qui manque ; enfin si les deux carrés manquent, elle a deux asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.

On ne répète pas les conditions qu'ont à remplir les coéfficients A, B, C, D pour que la courbe ait certaines positions relativement aux axes de coordonnées ; elles sont les mêmes que pour l'ellipse, à cela près que B^2-4AC est positif. Dans chaque position particulière de l'hyperbole, il est aisé d'obtenir ces mêmes conditions en donnant aux coefficients des valeurs convenables.

On voit, par tout ce qui précède, comment il est possible de déduire de l'équation d'une ligne courbe sa forme, son étendue, ses limites, et toutes les sinuosités de son cours. La marche qu'on vient de suivre est générale, et s'appliquerait également à toutes les courbes algébriques. Il est essentiel pour ceux qui font l'étude des

Digitized by Google

courbes, de bien se pénétrer de cette marche à l'aide d'exemples particuliers. Mais c'est tout ce que la mémoire doit conserver ; car il est inutile et même nuisible de s'y fixer les conditions particulières qui ont lieu entre les coefficients suivant les différents cas, et il est préférable de se laisser conduire naturellement à ces conditions par la suite des raisonnements.

FIN.

Digitized by Google

ERRATA.

Pages	Lignes	
13		Fig. 11, *lisez :* Fig. 12.
13		Fig. 12, *lisez :* Fig. 11.
15		Fig. 13, *lisez :* Fig. 12.
23	25	$y-2qx>0$, *lisez :* $y^2-2px>0$.
26	11	$(yy')^2-m(x-x')^2$, *lisez :* $(y-y')^2-m(x-x')^2$.
38	25	$x'=-\frac{p(p-\alpha)}{\sqrt{\beta^2+(p-\alpha)^2}}$, *lisez :* $x'=p-\frac{p(p-\alpha)}{\sqrt{\beta^2+(p-\alpha)^2}}$.
39	12	$x'[x'+(p+\alpha)]^2$, *lisez :* $x'[x'+(p-\alpha)]^2$.
41	20	$x=0$, *lisez :* $x=p$.
45	27	$x=-\frac{2p}{m}+p=-\frac{2p}{m}-p$, *lisez :* $x=-\frac{2p}{m}(1+m)+p=\frac{-2p}{m}-p$.
47	9	$a^2+b^2=a+\mathrm{OS}_1$, *lisez :* $a^2+b^2=a\times\mathrm{OS}_1$.
48	9	$x-x$, *lisez :* $x-x'$; $mx+p$, *lisez :* $mx'+p$.
69	4	On a en O, *lisez :* on a en O'.
80	9	$m\mathrm{F}, m'\mathrm{F}', m''\mathrm{F}'', m'''\mathrm{F}'''$, *lisez :* $m\mathrm{F}', m'\mathrm{F}', m''\mathrm{F}', m'''\mathrm{F}'$.
87	8	Qu'on mène A'M, *lisez :* qu'on mène AM.
91	19	$\frac{\mathrm{M'K}}{\mathrm{M'F}}=\frac{\mathrm{NK}}{\mathrm{NF}}$, *lisez :* $\frac{\mathrm{M'K}}{\mathrm{M'F}}=\frac{\mathrm{NR}}{\mathrm{NF}}$.
91	26	En M, *lisez :* en N.
103	19	Soit I' le milieu, *lisez :* soit I le milieu.
106	19	$\frac{m}{\alpha}=\mathrm{K}'$, *lisez :* $\frac{m}{\alpha}=\mathrm{K}$.
113	15	$\mathrm{Tang\,V}=\frac{2p}{y(m-1)}$, *lisez :* $\mathrm{tang\,V}=\frac{2p}{y(m+1)}$.
114	6	$\mathrm{K}(a^2-b^2)>2a^2b$, *lisez :* $\mathrm{K}(a^2-b^2)>2ab$.
120	9,22	$\mathrm{M}x^2+\mathrm{N}y+\mathrm{P}=0$, *lisez :* $\mathrm{M}x^2+\mathrm{N}y^2+\mathrm{P}=0$.
123	11	$\mathrm{Sin}(\alpha'-\alpha)=\sin\alpha'\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha'$, *lisez :* $\sin(\alpha'-\alpha)=\sin\alpha'\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha'$.

Digitized by Google

ERRATA.

Pages	Lignes	
125	4	$m^2\cos^2\alpha\cos^2\alpha' = \sin^2\alpha\sin^2\alpha'$, *lisez :* $m\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha' = 0$.
136	2	De la valeur de α par a, *lisez :* de la valeur de d par a.
140	1	$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{AF}^2 =$, *lisez :* $\overline{OA}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{AF}^2 =$.
148	3	$y' - \alpha x'$, *lisez :* $y' = \alpha x'$.
227	1	Fig. 13, *lisez :* Fig. 31.
258	16	$a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 = a^2b^2$, *lisez :* $a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 = -a^2b^2$.
280	4	$\frac{FM}{F''M''}$, *lisez :* $\frac{FM}{F_1M_1}$.
292	9	$y = \frac{p}{y_1}x + p\frac{x_1}{p_1}$, *lisez :* $y = \frac{p}{y_1}x + p\frac{x_1}{y_1}$.
339	22	$\int_0^x \frac{R^2dx}{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \int_0^x \frac{R^2dx}{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, *lisez :* $\int_0^x \frac{R^2dx}{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \int_0^x \frac{x^2dx}{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.
352	10	Trap. mixt. (P'K'KR), *lisez :* trap. mixt. (PK'KR).
367	24	$M'm'n'p'\ldots\ldots N'$, *lisez :* $Mm'n'p'\ldots\ldots N'$.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

This book should be returned
the Library on or before the last d
stamped below.
A fine of five cents a day is incurr
by retaining it beyond the specifi
time.
Please return promptly.

Digitized by Google

Math 8608.45.3
Traite des lignes du second ordre.
Cabot Science 003373906
3 2044 091 928 861

Digitized by Google